

Geschichte

● **Kopernikus, Nikolaus:** Bildnis eines großen Deutschen. Neue Arbeiten der Kopernikus-Forschung mit Auszügen aus kopernikanischen Schriften in deutscher Sprache. Hrsg. v. Fritz Kubach. München, Berlin: Oldenbourg 1943. X, 378 S., 26 Abb. geb. RM. 10.50.

Spencer, Jones H.: Copernicus and the heliocentric theory. Nature, Lond. 151, 573 bis 576 (1943).

Es wird über die Entstehung des Werkes von Copernicus und den Kampf um seine Ausbreitung in klaren Worten berichtet, ohne daß eine wesentliche Bemerkung fiele. Hervorzuheben ist nur ein Zitat aus Thomas Digges (1546—1595) im Jahre 1576 erschienener „Perfit Description of the Caelestiall Orbes“. Digges bricht mit der Vorstellung, daß alle Fixsterne an einer Kugelschale angeheftet seien, und spricht davon, viele Sterne seien so entfernt, daß kein Licht von ihnen zu uns gelange. Zu verbessern ist die Behauptung des Verf., „die Mutter des Copernicus, Barbara Wasselrode, kam aus einer alten polnischen Familie“. Der Name lautet Watzenrode, die Familie war ausgesprochen deutschblütig. Eine ausgedehnte Sippen-
 42
 tafel befindet sich in den Kopernikus-Forschungen, herausgegeben von J. Papritz und H. Schmauch (Deutschland und der Osten, Bd. 22), Leipzig 1943.

v. Schelling (Berlin).

● **Briefe großer Naturforscher und Mathematiker.** Gesammelt u. hrsg. v. Max Bense. Köln: Staufen-Verl. 1943. 246 S.

Die Sammlung von Briefen und Briefausschnitten soll nach dem Vorwort des Verf. beweisen, „daß der Geist eine Notwendigkeit unseres Daseins ist“; der „unerschütterliche Forscher“ soll gezeigt werden. Das Inhaltsverzeichnis nennt dreißig Namen als Absender, der Bogen spannt sich von Christoph Columbus bis Wilhelm Röntgen. Zu jedem Namen gibt Verf. eine knappe, aber meist treffende, biographische Notiz, außerdem findet man auf dreieinhalb Seiten „Quellen und Anmerkungen“. In einer Neuauflage müßten diese Anmerkungen stark vermehrt werden. In den Briefen finden sich so viele Hinweise und Anspielungen, die der Leser, welcher den betreffenden Briefwechsel nicht schon im ganzen kennt, unmöglich verstehen kann. — Offenbar ist die ursprüngliche Sammlung des Verf. beim Druck gekürzt worden, ohne daß alle Spuren dieses Eingriffes verwischt werden konnten. Im Vorwort wird der Briefstil H. v. Helmholtz als Beispiel erwähnt, abgedruckt ist kein Brief von ihm. Sehr knapp und wenig charakteristisch ist die Auswahl bei J. Kepler ausgefallen, der doch wie wenige andere Forscher in seinen Briefen seine innersten Gedanken offenbarte. Nur durch die vermutete Kürzung ist es ferner erklärlich, daß d'Alembert mit ganzen 6 Zeilen vertreten ist, in welchen er sich beklagt, infolge schlechter Gesundheit nicht mehr zu produktiver Arbeit fähig zu sein. Auch von Fr. W. Bessel wird nur ein erschütternder Brief aus der Zeit seiner letzten, qualvollen Krankheit angeführt. Diesen wenig glücklichen Griffen stehen aber andere geschickt gewählte Proben gegenüber, so z. B. aus den Korrespondenzen von G. W. Leibniz und C. Fr. Gauß. Als erster Versuch ist das Bändchen freudig zu begrüßen, es wird gewiß bei einer Neuauflage noch gewinnen. Es wären dabei auch manche Druckfehler zu beseitigen; dem Leser, welcher der Mathematik ferner steht, wird „v. Staudt, der Geometer der Loge“, ein Rätsel bleiben. Dieser Fehler — Loge statt Lage — steht auf S. 148.

v. Schelling (Berlin).

Neville, E. H.: Srinivasa Ramanujan. Nature, Lond. 149, 292—295 (1942).

Biographie auf Grund persönlicher Erinnerungen des Verf., der wesentlich bestimmend für Ramanujans Aufenthalt in London war. Harald Geppert (Berlin).

Philosophie. Logik

● Heisenberg, Werner: Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaft. 4. Aufl. Leipzig: Hirzel 1943. 95 S. RM. 3.50.

Pasturaud, Marie-Thérèse: Le rôle des relations d'équivalence en physique théorique et dans la notion de causalité mathématique. Rev. Scient., Paris 81, 251—260 (1943)

Eine Äquivalenzrelation, d. h. eine reflexive, symmetrische und transitive binäre Relation, definiert eine Klasseneinteilung. Eine Anwendung ist der Begriff der physikalischen Größe. Zwei Meßapparate heißen äquivalent, wenn sie stets dasselbe Meßergebnis liefern. Diese Äquivalenzrelation definiert eine Klasseneinteilung, und eine dieser Klassen oder eine eindeutige Funktion davon heißt „physikalische Größe“. Eine Größe, die nur einen möglichen Wert hat (wie die Masse oder die Ladung eines Elementarteilchens) heißt einwertig (univalent). Zwei physikalische Systeme, insbesondere zwei Elementarteilchen, heißen von derselben Art, wenn sie in allen einwertigen meßbaren Größen übereinstimmen. — Zu jeder Äquivalenzrelation gehört eine maximale Gruppe, die die Äquivalenzklassen zu Transitivitätsgebieten hat. So gehört zu jeder Aussagenfunktion $p(x)$, definiert auf einer Menge E , eine Äquivalenzrelation auf E , definiert durch $x \equiv y$, wenn $p(x) \supseteq p(y)$, und dazu wieder eine maximale Gruppe, die Kausalitätsgruppe der Aussage p .
van der Waerden (Leipzig).

Algebra und Zahlentheorie

Lineare Algebra. Polynome:

Salas Boli, Manuel: Der Determinantenbegriff nach Weierstrass. Euclides 4, 175—179 (1944) [Spanisch].

Eckmann, Beno: Über stetige Lösungen linearer Gleichungssysteme. (122. Jahresvers., Sitten, Sitzg. v. 29.—31. VIII. 1942.) Verh. Schweiz. naturforsch. Ges. 1942, 78—79.

Verf. betrachtet das Linearsystem $(1) \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = 0, i = 1, \dots, m$, in dem die a_{ik} alle reellen Werte durchlaufen, für die ihre Matrix den Rang m hat. Eine nicht-triviale, für alle solchen a_{ik} gültige und stetig von ihnen abhängende Lösung $x_k = f_k(a_{11}, \dots, a_{nm})$ heißt kurz stetige Lösung von (1). Die Frage, für welche n und m (1) eine stetige Lösung besitzt, wird zwar nicht voll beantwortet, aber aus topologischen Sätzen folgt, daß es für 1) $n - m$ gerade 2) $n - m = 3$ oder 7 mit $m \geq 2$ keine solche Lösung gibt. Ausführlicher Beweis in Comment. math. helv. 15, 318—339 (1943); vgl. auch dies. Zbl. 27, 144.
Harald Geppert (Berlin).

Fernandez Toral, Mariano: Abschätzungstechnik der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit reellen Koeffizienten. Euclides 4, 221—224 (1944) [Spanisch].

Gruppentheorie:

Lorenzen, Paul: Ein Beitrag zur Gruppenaxiomatik. Math. Z. 49, 313—327 (1944).

Die in der Gruppentheorie vorkommenden Axiome werden vom Verf. in sechs Gruppen eingeteilt, und zwar in die allgemeinen Unitäts- und Existenzaxiome, die Einsaxiome, die speziellen Unitäts- und Existenzaxiome und die Assoziativaxiome. Der Zweck der Arbeit besteht in der Bestimmung aller kürzesten Axiomensysteme zur Charakterisierung von Gruppen. Jedes vollständige Axiomensystem enthält mindestens vier Axiome, falls das Assoziativaxiom (A) von Baer-Levi, das bei eindeutiger Multiplikation dem üblichen $a(bc) = (ab)c$ äquivalent ist, benutzt wird. Unter den viergliedrigen Systemen taucht ein neues System auf, das schwächer ist als das Axiomensystem von Garver (vgl. dies. Zbl. 11, 150). Werden statt A Assoziativaxiome benutzt, die außer A noch eine Unitäts- oder Existenzaussage enthalten, so können die viergliedrigen Systeme auf sieben verschiedene dreigliedrige reduziert werden.

O. Borůvka (Brünn).

Dubreil, Paul: Sur les problèmes d'immersion et la théorie des modules. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 625—627 (1943).

Unter einer Semi-Gruppe versteht man bekanntlich eine Halbgruppe (Assoziativgesetz) mit Gültigkeit der Kürzungsregeln. Ein Schieftring heißt rechtsseitig (linksseitig) regulär, wenn 1. keine Nullteiler vorhanden sind, 2. je zwei von Null verschiedene Elemente ein von Null verschiedenes rechtsseitiges (linksseitiges) gemeinsames Vielfaches besitzen. Ähnlich (ohne die auf die Null sich beziehenden Bedingungen) werden rechtsseitig (linksseitig) reguläre Semi-Gruppen erklärt. In der vorliegenden Arbeit werden einige Sätze über rechtsseitig bzw. linksseitig reguläre Semi-Gruppen und Schieftringe ohne Beweise angeführt. Insbesondere kann eine Semi-Gruppe S dann und nur dann in eine Gruppe G eingebettet und jedes Element $\xi \in G$ in der Form $\xi = ab^{-1}$, mit $a, b \in S$, dargestellt werden, wenn S rechtsseitig regulär ist. Ist \mathfrak{o} ein linksseitig nichtregulärer Schieftring und \mathfrak{M} ein (Links) \mathfrak{o} -Modul, dessen jedes von Null verschiedene Element unabhängig ist, so gibt es in \mathfrak{M} eine beliebige (endliche) Anzahl linear unabhängiger Elemente. Dies gilt auch dann, wenn \mathfrak{M} eine aus einer endlichen Anzahl linear unabhängiger Elemente bestehende Basis besitzt. O. Borůvka (Brünn).

Richardson, A. R.: Groupoids and their automorphisms. Proc. London Math. Soc. II. s. 48, 83—111 (1943).

Es sei Γ eine nichtleere Menge. Unter einer Zerlegung auf Γ versteht man bekanntlich ein System von nichtleeren disjunkten Untermengen von Γ , die die Menge Γ bedecken. Sind A, B Zerlegungen auf Γ , und ist jedes Element in A die Summe von einigen Elementen in B , so wird diese Beziehung mit $A \geq B$ ausgedrückt. Durch die Beziehung \geq wird in jedem Systeme von Zerlegungen auf Γ eine partielle Ordnung eingeführt. Ferner kennt man [O. Borůvka, Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk, Nr. 275 (1939) und vgl. dies. Zbl. 24, 299] zwei Operationen $[\]$, $(\)$, die zu jedem Systeme A von Zerlegungen auf Γ weitere Zerlegungen auf Γ , $[A]$, (A) , eindeutig zuordnen, welche die Verbandsvereinigung und den Verbandsdurchschnitt bezüglich der genannten partiellen Ordnung darstellen. In der vorliegenden Arbeit werden zuerst die Operationen $[\]$, $(\)$ für zwei Zerlegungen definiert. Ist ferner A eine Zerlegung auf Γ , so bildet die Menge aller eineindeutigen Abbildungen von Γ auf sich selbst, die jedes Element von A invariant lassen, eine Gruppe, die sog. Trägheitsgruppe (group of inertia) von A ; dieselbe wird mit G_A bezeichnet. Der Hauptzweck der Arbeit liegt nun in Betrachtungen von Beziehungen zwischen Zerlegungen auf Γ , die evtl. durch weitere Postulate spezialisiert werden, und den zugehörigen Trägheitsgruppen. So bestehen z. B. für alle Zerlegungen A, B die Beziehungen $[G_A G_B] \subset G_{[AB]}$, $(G_A G_B) = G_{(AB)}$, wobei natürlich die linken Seiten die Vereinigung bzw. den Durchschnitt der betreffenden Gruppen bedeuten. Diese Betrachtungen werden vom Verf. insbesondere auf Gruppoide und ihre Automorphismen angewendet und bilden einen bedeutenden Beitrag zu der Gruppoidentheorie, zumal die erwähnten Spezialisierungen von Zerlegungen abhängig von der Multiplikation gewählt werden. O. Borůvka (Brünn).

Newman, M. H. A.: A characterisation of Boolean lattices and rings. J. London Math. Soc. 16, 256—272 (1941).

Eine Doppelalgebra mit den Operationen \cup (Vereinigung) und mit \cdot (Multiplikation) heißt bekanntlich distributiv, wenn für sie die beiden distributiven Gesetze $a(b \cup c) = ab \cup ac$, $(b \cup c)a = ba \cup ca$ gelten. Einselemente in bezug auf die Vereinigung bzw. Multiplikation stellen die Nullen bzw. Einheiten der Algebra dar, und ähnlich werden z. B. die linksseitigen Nullen und Einheiten erklärt. Ferner bilden zwei (evtl. zusammenfallende) Elemente 0, 1 ein extremes Paar (extreme pair), wenn die Gleichungen $x \cup a = 1$ und $xa = 0$ für jedes Element a lösbar sind. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um Charakterisierung von Booleschen Algebren mittels der obigen Begriffe und um Untersuchungen über Unabhängigkeit der verwendeten Axiome. Das Hauptresultat ist folgendes: Eine Doppelalgebra ist die direkte Vereinigung eines (nicht notwendig assoziativen) Booleschen Ringes mit Einheit und eines Boole-

schen Verbandes dann und nur dann, wenn sie distributiv ist und die Elemente 0,1 eines extremen Paares eine linksseitige Null bzw. linksseitige Einheit darstellen. Übrigens stehen die Untersuchungen des Verf. in enger Beziehung mit einer Arbeit über Boolesche Algebren von Stone (vgl. dies. Zbl. 12, 290), deren Resultate in verschiedenen Richtungen erweitert werden.

O. Borůvka (Brünn).

Schutzenberger, Marcel-Paul: Sur la théorie des structures de Dedekind. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 717—718 (1943).

Die Arbeit enthält einige ohne Beweise angeführte Sätze über endliche modulare Verbände. Ein solcher Verband wird als ganz (entier) bezeichnet, wenn jedem Element, dem ein einziges Element unmittelbar vorangeht (folgt), das kleinste (größte) Element des Verbandes unmittelbar vorangeht (folgt). Ein Quotientenverband eines ganzen Verbandes ist ganz und ebenso das direkte Produkt von zwei ganzen Verbänden. Ein endlicher modularer Verband wird Simplex genannt, wenn er ganz ist und hinsichtlich direkter Produkte unzerlegbar. Quotientenverbände von Simplexen sind wiederum Simplexe. Ferner wird in einem Satze die Struktur von Simplexen mit gegebener Länge von Hauptketten beschrieben.

O. Borůvka (Brünn).

Zahlentheorie:

Racliš, Nicolas: Remarques sur le premier théorème de Fermat. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 26, 281—282 (1944).

Verf. gibt verschiedene Sätze über die Teiler von $a^p - a$, wo a ganz und p eine ungerade Primzahl ist.

Holzer (Graz).

Ljunggren, W.: Beweis eines Satzes von de Jonquières. Norsk mat. Tidsskr. 26, 3—8 (1944) [Norwegisch].

Von de Jonquières [Nouv. Ann. Math., II. s. 17, 219—220 (1878)] ist der Satz ausgesprochen worden: Die Zahl 5 ist die einzige Zahl $n > 1$, für die sowohl n wie auch n^2 als Quadratsumme zweier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen darstellbar ist. Der dort gegebene vermeintliche Beweis ist jedoch nicht allgemeingültig. Hier wird der Satz nun bewiesen. Die Aufgabe wird auf die Lösung der Gleichung $y^2 - 2\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^2 = -1$ in (von selbst ungeraden) ganzen Zahlen x und y zurückgeführt. Daß hiernach eine ungerade Potenz der Einheit $E = 1 + \sqrt{2}$ die Gestalt $y + \frac{x^2+1}{2}\sqrt{2}$ haben muß, führt auf eine Einheit ξ von der Relativnorm -1 im Körper $P(E, \sqrt{E^2+1})$. Der vom Verf. (vgl. dies. Zbl. 27, 11) untersuchte Bau der Einheiten mit der Relativnorm ± 1 verhilft dann zu Rückschlüssen auf die möglichen Werte von ξ und damit auf die von x und y , woraus die Behauptung hervorgeht. Die Behandlung allgemeinerer diophantischer Gleichungen nach demselben Verfahren wird angedeutet.

Weber (Berlin).

Pierre, Charles: Sur le théorème de Fermat $a^n + b^n = c^n$. C. R. Acad. Sci., Paris 217, 37—39 (1943).

Es seien a, b, c teilerfremde, von 0 verschiedene ganze Zahlen, $n > 2$ Primzahl, (1) $a^n + b^n = c^n$. Nach Abel und Legendre ist dann, wenn $\eta = (n, c)$ gesetzt wird, $\eta(a+b)$ die n -te Potenz eines Teilers C von c . Aus Symmetriegründen ist dieser Satz auch auf b oder a statt c anwendbar; dem η entspreche dabei η' bzw. η'' , und der stets positiven ganzen Zahl $\varphi = c/C$ entspreche Θ bzw. ω . Verf. beweist dann, daß jede der Zahlen $\eta\varphi$, $\eta'\Theta$, $\eta''\omega$ quadratischer Rest nach jeder der beiden anderen ist. Benutzt wird dabei, daß $(x+y)^n - x^n - y^n$ für jede Primzahl $n > 2$ algebraisch durch $nxy(x+y)$ teilbar ist. Die im Beweis vorgenommene Fallunterscheidung läßt sich sparen, wenn man stets, wie im letzten Teil des zweiten Falles, bloß mit η^{n-1} , $\eta\varphi^n$, $\eta'\Theta$, $\eta\varphi$ statt n^{n-1} , $n\varphi^n$, $\omega\Theta$, $n\varphi$ vorgeht. Mit Hilfe dieses Satzes zeigt sich auf elementarem Wege, daß für jede ungerade Primzahl n in jeder Lösung der Gleichung (1) in ganzen a, b, c eine dieser drei Zahlen durch 4 teilbar ist. Für den Fall teilerfremder

Zahlen a, b, c , unter denen etwa c die gerade sei, ergibt sich nämlich, daß andernfalls $\eta'\Theta^n$ und $\eta''\omega^n$, daher auch $\eta'\Theta$ und $\eta''\omega$ beide $\equiv 3 \pmod{4}$ sein müßten, was dem Hilfssatz widerspräche.

Weber (Berlin).

Roussel, André: *Remarques sur un énoncé de Fermat.* C. R. Acad. Sci., Paris 217, 39—41 (1943).

An Hand der Tatsache, daß die Funktion $\sin \pi x$ genau für ganzzahlige x verschwindet, läßt sich die Lösungszahl der Gleichung $x^n + y^n = z^n$ (mit festem bzw. veränderlichem ganzem $n > 2$) in ganzen Zahlen $x \leq N, y \leq N, z \leq N$ auf die Nullstellenzahl eines gewissen Gleichungssystems in einem beschränkten Bereich zurückführen. Um die Richtigkeit des großen Fermatschen Satzes zu entscheiden, genügt es auch, durch passende Wahl der positiven Funktion f für wachsendes N das monotone Anwachsen der über die Werte von f an jenen Nullstellen erstreckten Summe J gegen einen angebbaren Grenzwert K sicherzustellen. Je nachdem der Fermatsche Satz richtig oder falsch ist, ist K Null oder positiv; das Vorliegen des letzteren Falles könnte evtl. durch angenäherte Berechnung von K auf Grund einer expliziten Darstellung von J erkannt werden. — Über die Richtigkeit des Fermatschen Satzes entscheidet auch das asymptotische Verhalten des über einen beschränkten Bereich gemessenen, in geschlossener Form darstellbaren Maximums einer gewissen Funktion; ihr Bau ist dadurch gegeben, daß die Funktion $\cos^2 \pi x$ ihren größten Wert genau für ganzzahlige x annimmt.

Weber (Berlin).

Kanold, Hans-Joachim: *Folgerungen aus dem Vorkommen einer Gaußschen Primzahl in der Primfaktorenzerlegung einer ungeraden vollkommenen Zahl.* J. reine angew. Math. 186, 25—29 (1944).

Jede etwaige ungerade vollkommene Zahl n entsteht nach Euler aus einer Potenz einer Primzahl p mit einem Exponenten $\equiv 1 \pmod{4}$ durch Multiplikation mit geraden Potenzen weiterer Primzahlen q_1, q_2, \dots, q_r . Für den Fall, daß einer der Primteiler die Gestalt $2^x + 1$ mit ganzrationalem x hat, wird eine untere Schranke für die Anzahl der q mit $q \equiv 1 \pmod{2^x + 1}$ gegeben. Für $x \leq 4$ folgt hieraus, daß p einer bestimmten engeren Restklasse angehört oder n mindestens zwei Primteiler $\equiv 1 \pmod{2(2^x + 1)}$ enthält. Für diesen Fall ergibt sich hieraus, für die übrigen n durch einfache Abschätzung, daß n mindestens einen Primteiler ≥ 61 enthält. Diese Ergebnisse ermöglichen den Beweis des Satzes, daß eine ungerade vollkommene Zahl mindestens fünf und, wenn sie nicht durch 3 teilbar ist, sogar mindestens neun verschiedene Primteiler enthält. Eine Verschärfung des Ergebnisses mit denselben Mitteln wird erwähnt.

Weber (Berlin).

Selmer, Ernst S.: *Über Primzahlen von der Form $x^2 + 1$.* Norske Vid. Selsk. Forh. 15, 149—152 (1943).

Verf. gibt einige empirische Untersuchungen zu der von Hardy und Littlewood [Acta Math. 44, 1—70 (1922), 46ff.] aufgestellten, bis heute unbewiesenen asymptotischen Formel für die Anzahl $P(n)$ der Primzahlen $\leq n$ der Form $x^2 + 1$.

Holzer (Graz).

Selmer, Ernst S., und Gunnar Nesheim: *Tafel der Zwillingsprimzahlen bis 200 000.* Norske Vid. Selsk., Forh. 15, 95—98 (1943).

Verff. geben eine Tafel der Zahlen n , so daß sowohl $6n + 1$ als auch $6n - 1$ Primzahlen $< 2 \cdot 10^5$ sind. Mit Ausnahme des Paares (3,5) werden so alle Primzahlzwillinge erfaßt.

Holzer (Graz).

Selmer, Ernst S., und Gunnar Nesheim: *Die Goldbachschen Zwillingsdarstellungen der durch 6 teilbaren Zahlen 196302—196596.* Norske Vid. Selsk., Forh. 15, 107—110 (1943).

Verf. prüfen in dem Titelintervall die möglichen Darstellungen $n = p_1 + p_2$, wo $p_1, p_1 + 2, p_2, p_2 - 2$ Primzahlen sind, besonders unter Berücksichtigung einer unbewiesenen Formel von Stäckel (Abh. Heidelberg. Akad. Wiss., Math.-nat. Kl. 1922, Nr 10) nach.

Holzer (Graz).

Kuhn, Pavel: Zur elementaren Abschätzung des Mittelwertes der Dirichletschen Tellerfunktion. *Norske Vid. Selsk., Forh.* **15**, 29—32 (1943).

Für die Dirichletsche Funktion $D(x) = [x] + [x/2] + [x/3] + \dots$, wo $[y]$ das größte Ganze von y bedeutet, gibt Verf. die Abschätzung: $D(x) = x \ln x + (2E - 1)x + A(x)$, wobei E die Eulersche Konstante bedeutet und $\left| \int_0^x A(t) dt/x \right| < \ln x/8 + 1/3 + 3/x$ gilt.
Holzer (Graz).

Atkinson, F. V.: The mean value of the zeta-function on the critical line. *Proc. Lond. Math. Soc., II. s.* **47**, 174—200 (1941).

Zwei Resultate von Ingham und Titchmarsh werden erweitert zum Satz I:

Es gibt Konstante A, B, C, D, E , derart, daß $\int_0^\infty |\zeta(\frac{1}{2} + it)|^4 e^{-\delta t} dt$
 $= \delta^{-1} \{A \lg^4 \delta^{-1} + B \lg^3 \delta^{-1} + C \lg^2 \delta^{-1} + D \lg \delta^{-1} + E\} + O(\delta^{-\alpha})$, $\alpha = \frac{13}{14} + \varepsilon$,
 für $\delta \rightarrow 0$ und irgendein festes $\varepsilon > 0$; es ist, wie bei den genannten Autoren, $A = \frac{1}{2} \pi^{-2}$,
 und es wird hier berechnet $B = -\pi^{-2} \{2 \lg 2 \pi - 6 \gamma + \pi^{-2} 24 \zeta'(2)\}$, $2\gamma = 3 - \Gamma'(3)$.
 Der Beweis stützt sich auf eine Formel der analytischen Zahlentheorie, die als Theorem II
 bewiesen wird und auf eine asymptotische Formel von Estermann (vgl. dies. Zbl. **1**, 203)
 für Summen der Form $\sum_k d(m) d(m+k)$. Die Beweise beruhen auf der Transformation
 und geschickten Zerlegung der auftretenden Ausdrücke und der asymptotischen Ab-
 schätzung ihrer Teile.
Kienast (Zürich).

Popken, J.: Über die Irrationalität des Tangens einer rationalen Zahl. *Norsk mat. Tidsskr.* **26**, 66—70 (1944) [Holländisch].

Verf. beweist hier folgende Verschärfung des Lambertschen Satzes: Ist $r \neq 0$ rational, $\varepsilon > 0$ beliebig klein, so gilt für alle Paare von ganzen Zahlen $p, q > 0$ mit Ausnahme von endlich vielen die Ungleichung

$$\left| \operatorname{tang} r - \frac{p}{q} \right| > q^{-2-\varepsilon}.$$

Verf. stützt sich beim Beweis auf einen von ihm früher (vgl. dies. Zbl. **23**, 208) abgeleiteten, im zugehörigen Referat genannten Hilfssatz; ε tritt in der Gestalt $c/\log \log q$ auf.
Harald Geppert (Berlin).

Analysis

Allgemeines:

● **Sirk, Hugo:** Mathematik für Naturwissenschaftler und Chemiker. Eine Einführung in die Anwendungen der höheren Mathematik. **4.**, verb. Aufl. Dresden u. Leipzig: Theodor Steinkopff 1944. XII, 301 S., 1 Taf. u. 126 Abb. geb. RM. 12.—.

Die 1. und 3. Auflage wurden in dies. Zbl. **24**, 304 und **27**, 299 besprochen. Die Änderungen der neuen Auflage beziehen sich in erster Linie auf den mathematischen Anhang, in den einiges über kubische und allgemeine algebraische Gleichungen sowie im Abschnitt über Wahrscheinlichkeitsrechnung Bemerkungen über Beobachtungsfehler und die Elemente der Korrelationsrechnung aufgenommen wurden. Die sonstigen kleinen Änderungen betreffen in erster Linie die chemischen Beispiele. *Harald Geppert.*

● **Baule, Bernhard:** Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. **Bd. 3: Analytische Geometrie.** Leipzig: S. Hirzel 1943. 80 S. u. 89 Abb. RM. 4.40.

Das 3. Heft geht von Vektoren aus, behandelt Determinanten und Matrizen, lineare Gleichungen und Gebilde, homogene Koordinaten, Gebilde 2. Ordnung in Ebene und Raum, und schließlich einige Grundtatsachen der projektiven Geometrie. (Für H. **1**, **2** vgl. dies. Zbl. **27**, 299—300).
Ullrich (Gießen).

● **Baule, Bernhard:** Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. **Bd. 4: Gewöhnliche Differentialgleichungen.** Leipzig: S. Hirzel 1943. 114 S. u. 41 Abb. RM. 5.80.

Das 4. Heft behandelt die gewöhnlichen Differentialgleichungen in 3 Haupt-

abschnitten: A. Allgemeine Orientierung (20 S.). B. Lösungsmethoden (40 S.). C. Analytische Mechanik, dabei Elemente der Potentialtheorie mit Integralsätzen von Gauß, Green, Stokes (50 S.). Es wird vor allem darauf Wert gelegt, einfache Gleichungstypen nach festen Anweisungen technisch durchzurechnen; für jeden Typus wird ein Beispiel durchgeführt. Hervorzuheben ist die Tatsache, daß auf Laplace-Transformation und Legendre-Transformation verhältnismäßig weit eingegangen wird.

Ullrich (Gießen).

● Lietzmann, Walther: *Lebendige Mathematik*. Breslau: F. Hirt 1943. 441 S., 20 Taf. u. 343 Abb. Geb. RM. 12.50.

● Montessus de Ballore: *Cours de mathématiques*. 1. Paris: Gauthier-Villars 1942. 598 pag. ffrs. 100.—.

● Bouligand, G., et J. Dufresnoy: *Mathématiques pures*. Paris: Vuibert 1942. 700 pag. ffrs. 200.—.

● Keller, E. G.: *Mathematics of modern engineering*. London: Chapman and Hall 1943. 308 pag. sh 24/—.

Mengenlehre:

Schiffer, Menahem: On the subadditivity of the transfinite diameter. Proc. Cambridge Philos. Soc. 37, 373—383 (1941).

Für den transfiniten Durchmesser $d(\mathcal{M})$ eines Kontinuums \mathcal{M} in der Ebene wird die Eigenschaft der Subadditivität

$$d(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2) \leq d(\mathcal{M}_1) + d(\mathcal{M}_2)$$

nachgewiesen unter der Voraussetzung, daß \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 Kontinua mit gemeinsamen Punkten p sind, deren eines im Inneren, deren andres im Äußeren einer Jordankurve verläuft (von den p abgesehen).

Ullrich (Gießen).

Allgemeine Reihenlehre:

Hadwiger, H.: Konvergenz- und Divergenzbegriffe und ihre Klassifikation. (*Math. Vereinig., Bern, Sitzg. v. 30. X. 1942.*) Mitt. naturforsch. Ges. Bern 1942, LVI (1943).

Hadwiger, H.: Über die unbestimmte Konvergenz und eine Erweiterung des Abelschen Stetigkeitssatzes. (*122. Jahresvers., Sitten, Sitzg. v. 29.—31. VIII. 1942.*) Verh. Schweiz. naturforsch. Ges. 1942, 80.

Für Zahlenfolgen bzw. komplexwertige Funktionen eines reellen Parameters bei linksseitiger Annäherung an einen Randpunkt des Definitionsintervalls werden die Begriffe Endwert und Endwertmenge eingeführt. Je nachdem diese Endwertmenge einpunktig oder mehrpunktig bzw. beschränkt oder unbeschränkt ist, heißt das Verhalten der Folge oder der Funktion bestimmt oder unbestimmt bzw. konvergent oder divergent. So ergeben sich die vier Verhaltensarten: bestimmt konvergent, bestimmt divergent, unbestimmt konvergent und unbestimmt divergent. Es wird eine Erweiterung des Abelschen Stetigkeitssatzes, die sich auf Grund der neuen Begriffe aussprechen läßt, in Aussicht gestellt. Ferner weist Verf. auf eine Erweiterung des Steinitzschen Umordnungssatzes hin, die sich ebenfalls auf den neuen Begriff der unbestimmten Konvergenz stützt. (Vgl. dies. Zbl. 27, 391.)

Harald Geppert (Berlin).

Hadwiger, H.: Über ein Distanztheorem bei der A-Limitierung. Comment. math. helv. 16, 209—214 (1944).

Es sei (1) $\sum_{v=0}^{\infty} c_v$ eine nicht notwendig konvergente unendliche Reihe mit (2) $\nu c_v = O(1)$, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu |c_v| = c$. Dann ist $F(t) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v t^{\nu}$ sicher konvergent für $|t| < 1$. Die Zahl a heiße ein Abelscher Endwert von (1), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$

und jedem $0 < t < 1$ ein t' mit $t < t' < 1$ gibt, so daß $|F(t') - a| < \varepsilon$ ist. Die Menge aller Abelschen Endwerte von (1) werde mit A bezeichnet. Es bedeute s_n die Folge der Teilsummen von (1), S die Menge ihrer Häufungswerte s . Ist (1) konvergent, so besteht A aus einem einzigen (endlichen) Punkt, gegen den $F(t)$ konvergiert für $t \rightarrow 1$, und wegen (2) ist nach dem Satz von I. E. Littlewood auch das Umgekehrte richtig; es ist dann $A = S$. Aber auch wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ und $\lim_{t \rightarrow 1} F(t)$ nicht existieren, bestehen enge Beziehungen zwischen A und S . Hierüber beweist Verf. den folgenden Satz. Es gibt eine beste (d. h. kleinste) Konstante $\varrho > 0$, für welche die folgende Aussage richtig ist: zu jedem Abelschen Endwert a von (1) gibt es einen Teilsummenhäufungswert s , und zu jedem Teilsummenhäufungswert s von (1) einen Abelschen Endwert a , so daß jeweils $|a - s| \leq \varrho c$ ist. Der Satz enthält als Spezialfall eine Erweiterung des klassischen Abelschen Stetigkeitssatzes und seiner ursprünglichen Tauberschen Umkehrung; gilt nämlich statt (2) sogar (3) $vc_n = o(1)$, ist also $c = 0$, so ist $A = S$, gleichgültig, ob die Mengen einpunktig oder mehrpunktig sind. Für ϱ gibt Verf. die Abschätzung $0,4858 \dots \leq \varrho \leq 1,0160 \dots$ Meyer-König.

Good, I. J.: Note on the summation of a classical divergent series. J. Lond. Math. Soc. 16, 180—182 (1941).

Die Note enthält eine Bemerkung zur Frage der Summierbarkeit der Reihe $1 - 1! + 2! - 3! + \dots$ nach der Borel-Mittag-Lefflerschen Summationsmethode. Man bezeichnet nach G. H. Hardy [J. London Math. Soc. 9, 153—157 (1934); vgl. dies. Zbl. 9, 108; auch I. J. Good, Proc. Cambridge Philos. Soc. 38, 144—165 (1942); vgl. dies. Zbl. 28, 212] eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ als (B, α) -summierbar, wenn

$$(1) \quad \int_0^1 t^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-t^{1/\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{\Gamma(1 + \alpha n)} dt$$

konvergiert. In der genannten Arbeit von Hardy findet sich die Bemerkung, daß die Reihe $1 - 1! + 2! - 3! + \dots$ für alle $\alpha > 1$ (B, α) -summierbar ist. Verf. zeigt in der vorliegenden Note, daß dies tatsächlich nur für $1 < \alpha \leq 3$ zutrifft. Für $\alpha > 3$ ist die (B, α) -Methode zwar noch „anwendbar“, aber nicht „wirksam“, d. h. in (1) ist zwar die Reihe für alle t konvergent, das Integral jedoch divergent. Der Beweis stützt sich auf Resultate von E. M. Wright (J. London Math. Soc. 10, 286—293 (1935); vgl. dies. Zbl. 13, 21) über verallgemeinerte hypergeometrische Reihen. — Für die Potenzreihe $1 - 1!z + 2!z^2 - 3!z^3 + \dots$ ist $(B, 3)$ genau längs der positiven reellen Achse wirksam. Nimmt α von 3 bis 1 ab, so wird das (B, α) -Verfahren in einem immer weiteren Gebiet der z -Ebene wirksam. Jeder nicht auf der negativen reellen Achse gelegene Punkt z wird in das Gebiet einbezogen, wenn α genügend nahe an 1 gewählt wird. Das $(B, 1)$ -Verfahren selbst (Borelsches Verfahren) ist dagegen nicht mehr anwendbar. Vgl. zur Frage der Summierbarkeit von $1 - 1!z + 2!z^2 - 3!z^3 + \dots$ auch G. H. Hardy, Proc. Cambridge Philos. Soc. 37, 1—8 (1941); vgl. dies. Zbl. 27, 101. F. Lösch (Rostock).

Lorentz, Georg Gunther: Über die Mittelwerte der Funktionen eines Orthogonal-systems. Math. Z. 49, 724—733 (1944).

Es gilt bekanntlich: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\cos t + \cos 2t + \dots + \cos nt) = 0$ für $t \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, was man auch in der folgenden Form ausdrücken kann: die Folge $\{\cos nt\}$ ist für fast alle t durch das Cesàrosche Verfahren erster Ordnung C_1 gegen 0 limitierbar, $C_1\text{-}\lim \cos nt = 0$. Zweck dieser Arbeit ist es, analoge, sogar schärfere Aussagen für beliebige Orthogonalsysteme zu machen. Die Hauptergebnisse sind die folgenden: Ist $\{\varphi_n(t)\}$ ein im Intervall (a, b) definiertes normiertes Orthogonalsystem, und ist $\{a_n\}$ eine beliebige beschränkte Folge von reellen Zahlen, so gilt in (a, b) fast überall $C_\alpha\text{-}\lim a_n \varphi_n(t) = 0$ für $\alpha > \frac{1}{2}$. Für $\alpha = \frac{1}{2}$ besteht der Satz im allgemeinen nicht, es gibt sogar Systeme $\{\varphi_n(t)\}$, für welche $C_{\frac{1}{2}}\text{-}\lim \varphi_n(t) = 0$ nirgends gilt. — Für

die speziellen Rademacherschen Orthogonalfunktionen $r_n(t) = \text{sgn} \sin(2^{n+1}\pi t)$ läßt sich aber mehr behaupten, für diese gilt $C_\alpha\text{-lim } a_n r_n(t) = 0$ für jedes positive α . — Diesem Satz kann man auch eine wahrscheinlichkeitstheoretische Form geben: Sei $\{a_n\}$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Wenn die Vorzeichen $\varepsilon_n = \pm 1$ durch Zufall bestimmt werden, so kann man mit der Wahrscheinlichkeit 1 behaupten, daß die Folge $\{\varepsilon_n a_n\}$ durch das Cesàrosche Verfahren C_α jeder positiven Ordnung α gegen 0 limitierbar ist. — Eine weitere Folgerung ist: Ist $t = 0$, $e_1 e_2 \cdots e_n \cdots$ die dyadische Darstellung der Zahl t ($0 < t < 1$), so gilt für fast alle t : $C_\alpha\text{-lim } e_n = \frac{1}{2}$ ($\alpha > 0$.)

Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

Ward, A. J.: A remark on Kloosterman's paper „On the convergence of series summable (C, r) “. J. Lond. Math. Soc. **16**, 81—82 (1941).

Im Anschluß an die im Titel genannte Arbeit von H. D. Kloosterman (J. London Math. Soc. **15**, 91—96 (1940); dies. Zbl. **26**, 108) bemerkt Verf.: (1) Für $\Delta_h^r S_n^{(r)}$ läßt sich eine Darstellung angeben, die der bei Kloosterman für $\Delta_h^r f(x)$ gegebenen analog ist. Sie beruht auf der Feststellung, daß $L_h^r(n) = \Delta_h^r S_n^{(r)} - h^r S_n^{(0)}$, ($h > 0$), eine lineare Funktion von $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+rh}$ mit positiven Koeffizienten und der Koeffizientensumme $\frac{1}{2} rh^r (h+1)$ ist, ebenso $L_{-k}^r(n) = \Delta_{-k}^r S_n^{(r)} - k^r S_n^{(0)}$, ($k > 0$), eine lineare Funktion von $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-r(k-1)+1}$ mit negativen Koeffizienten und der Koeffizientensumme $-\frac{1}{2} rk^r (k-1)$. Damit läßt sich einer der Kloostermanschen Beweise etwas abkürzen. — (2) Die Kloostermansche Methode liefert einen einfachen Beweis eines von S. Izumi [Tôhoku Math. J. **33**, 119 (1930)] herrührenden Resultats, nach dem aus $S_n^{(r)} = o(nr)$ für $n \rightarrow \infty$ stets $S_n^{(0)} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ folgt, wenn es zu $\varepsilon > 0$ ein n_0 und ein $\delta > 0$ gibt derart, daß $\sum_{v=n}^m a_v > -\varepsilon$ für $n \geq n_0$ und $n < m \leq n(1+\delta)$ gilt. F. Lösch.

Cossar, J.: A theorem on Cesàro summability. J. London Math. Soc. **16**, 56—68 (1941).

Es sei $a > 0$, $r > 0$, $p = [r]$, $f(x)$ integrierbar in jedem Intervall (a, b) mit $b > a$ (alle Integrale im Lebesgueschen Sinn, $\int_a^\infty = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b$) und $\int_a^\infty f(x) dx$ (C, r) -beschränkt. Weiter sei in $x > a$ eine Klasse Φ von Funktionen $\varphi(x)$ definiert, die entweder (A) den folgenden Bedingungen genügt: $\varphi(x) \rightarrow 0$ gleichmäßig für $x \rightarrow \infty$, die Ableitung $\varphi^{(r)}(x)$ ist in jedem Intervall (a, b) absolut stetig, $\int_a^\infty x^r |\varphi^{(r+1)}(x)| dx$ ist gleichmäßig konvergent; oder (B) den folgenden Bedingungen: $\varphi(x) \rightarrow 0$ gleichmäßig für $x \rightarrow \infty$, $\varphi^{(p+1)}(x)$ ist in jedem Intervall (a, b) absolut stetig, $\int_a^\infty x^{p+1} |\varphi^{(p+2)}(x)| dx$ ist gleichmäßig konvergent. Dann ist $\int_a^\infty f(x) \varphi(x) dx$ gleichmäßig (C, r) -summierbar für alle φ aus Φ . Die auftretenden Ableitungen nichtganzzahliger Ordnung sind definiert durch

$$\varphi^{(\alpha)}(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} \int_x^b (t-x)^{-\alpha} \varphi(t) dt \quad \text{für } 0 < \alpha < 1$$

und $\varphi^{(\alpha+k)}(x) = (d/dx)^k \varphi^{(\alpha)}(x)$ für $k = 1, 2, \dots$ — Der Beweis dieses Satzes für nichtganzzahliges r bildet den Inhalt der Note. Die Bedingungen (B) haben die Bedingungen (A) zur Folge. Der (C, r) -Wert von $\int_a^\infty f \varphi dx$ wird für beide Fälle angegeben.

Für ganzzahliges r stammt der Satz im wesentlichen von G. H. Hardy [Messenger of Math. **40**, 87—91 und 108—112 (1911)]. Er bildet das Integralanalogon zu einem Reihensatz von Bohr und Hardy [W. L. Ferrar, Proc. London math. Soc., II. s. **27**, 541—548 (1928)], den A. F. Andersen (ebenda, 39—71) unter zu (A) ähnlichen Bedingungen verallgemeinert hat. Den Fall $\varphi(x) = x^{-\delta}$ hat M. E. Grimshaw (vgl. dies. Zbl. **9**, 60) direkt untersucht.

Meyer-König (Stuttgart).

Fuchs, W. H. J., and W. W. Rogosinski: A note on Mercer's theorem. J. London Math. Soc. 17, 204—210 (1942).

Der Mercersche Satz für Funktionen besagt: Strebt die in jedem Intervall $0 < x < x_1$ beschränkte und integrierbare Funktion $s(x) \rightarrow s$ für $x \rightarrow \infty$, so strebt $t(x) = s(x) - x^{-1}(\zeta + 1) \int_0^x s(t) dt$ gegen $-\zeta s$; umgekehrt folgt aus der Konvergenz von $t(x)$ diejenige von $s(x)$ dann und nur dann, wenn $\Re \zeta < 0$ ist. Nach G. H. Hardy [Quart. J. Math. 18, 143—150 (1912)] gilt der folgende Zusatz: Ist $\Re \zeta > 0$, so konvergiert $t(x)$ dann und nur dann, wenn $s(x) = Ax^\zeta + B + o(1)$ ist mit geeigneten Konstanten A und B . Das durch den Übergang von $s(x)$ zu $t(x)$ gegebene Limitierungsverfahren werde mit M_ζ , seine Iterationen mit M_ζ^p ($p \geq 1$, ganz) bezeichnet. Entsprechend dem Hardyschen Zusatz beweisen die Verff.: Ist $\Re \zeta > 0$, so ist $s(x)$ dann und nur dann M_ζ^p -limitierbar, wenn mit geeigneten Konstanten A_r und für $x \rightarrow \infty$ konvergenter Funktion $c(x)$ die Darstellung $s(x) = x^\zeta \sum_{r=0}^{p-1} A_r \log^r x + c(x)$ gilt. Eine ähnliche, etwas weitläufiger zu formulierende Aussage gilt für $\Re \zeta = 0$. — Das Verfahren M_ζ^p spielt eine Rolle in der Theorie der Hausdorffschen Verfahren $T \sim \Phi$ zur Limitierung von Funktionen: $t(x) = \int_0^1 s(xt) d\Phi(t)$, wo $\Phi(t)$ in $(0; 1)$ von beschränkter Schwankung ist. Zum Verfahren T gehört in $\Re \zeta \geq 0$ die Mellin-Transformation $T(z) = \int_0^1 t^z d\Phi(t)$. Die Mellin-Transformation von M_ζ^p ist $M_\zeta^p(z) = \{M_\zeta(z)\}^p = (z - \zeta)^p (z + 1)^{-p}$. Hat $T(z)$ an der Stelle ζ mit $\Re \zeta > 0$ eine Nullstelle der Ordnung p , so ist T gleich dem Produkt $M_\zeta^p T_1$ der beiden Hausdorffschen Verfahren M_ζ^p und T_1 , wobei $T_1(\zeta) \neq 0$ ist [W. W. Rogosinski, Proc. Cambridge Philos. Soc. 38, 344—363 (1942)]. Das oben formulierte Ergebnis erhält nun Bedeutung durch den folgenden von den Verff. bewiesenen Satz: Die Funktion $s(x)$ ist dann und nur dann durch das Verfahren $T = M_\zeta^p T_1$ (mit $\Re \zeta > 0$ und $T_1(\zeta) \neq 0$) limitierbar, wenn $s(x) = \sigma(x) + \tau(x)$ ist, wobei $\sigma(x)$ M_ζ^p - und $\tau(x)$ T_1 -limitierbar ist. Weiter gilt: Ist bei $\Re \zeta > 0$ und $T_1(\zeta) \neq 0$ $s(x)$ durch das Verfahren $M_\zeta^p T_1$ limitierbar, und ist $s(x)$ außerdem T_2 -limitierbar, wobei T_2 ein Hausdorffsches Verfahren mit $T_2(\zeta) \neq 0$ ist, so ist $s(x)$ T_1 -limitierbar. Der Fall $\Re \zeta = 0$ wird jeweils mitbehandelt. Diese Ergebnisse werden zum Schluß noch angewandt auf das Verfahren $N_p = M_{\zeta_1}^{p_1} \dots M_{\zeta_m}^{p_m} H_p$ ($\Re \zeta_\mu \geq 0$; $p_\mu \geq 1$, $p \geq 0$ (ganz $H_p \sim (p-1)!^{-1} \int_0^t (\log t/\tau)^{p-1} d\tau$ das Höldersche Verfahren der Ordnung $p \geq 1$; $H_0 \equiv$ Konvergenz).

Meyer-König (Stuttgart).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Schmidt, Erhard: Über die nebst ihren Ableitungen orthogonalen Polynomensysteme und das zugehörige Extremum. Math. Ann. 119, 165—204 (1944).

Die Aufgabe, bei einer in $a \leq x \leq b$ stetigen Funktion $F(x)$ das Integral $(1) \int_a^b F(x)^2 dx$ durch $(2) \int_a^b F'(x)^2 dx$ abzuschätzen, führt bei der Normierung $\int_a^b F(x) dx = 0$ auf die Wirtingersche Ungleichung

$$\int_a^b F(x)^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b F'(x)^2 dx,$$

in der die Gleichheit nur für $F(x) = c \cdot \cos \frac{\pi(x-a)}{b-a}$ eintritt. Verf. stellt sich nun die

umgekehrte Aufgabe, das Integral (2) durch (1) nach oben abzuschätzen unter der Einschränkung des Bereichs der Funktionen $F(x)$ auf Polynome von höchstens n -tem Grade; die Bestimmung der Größe

$$M_n(a, b) = \text{Max} \left[\int_a^b F'(x)^2 dx : \int_a^b F(x)^2 dx \right]^{1/2}$$

kann natürlich auf die von $M_n(-1, +1) = M_n = \frac{b-a}{2} M_n(a, b)$ zurückgeführt werden.

— Es liegt nahe, den Fall eines geraden und ungeraden n zu sondern und die konkurrierenden Polynome nach normierten Legendreschen Polynomen zu entwickeln; dadurch geht (2) in eine positiv-definite quadratische Form der Entwicklungskoeffizienten über; will man diese auf Hauptachsengestalt bringen, so kommt dies auf die Einführung passender Linearverbindungen der Kugelfunktionen hinaus, und zwar gibt es zu jedem $k > 1$ ein System von $k+1$ geraden Polynomen höchstens $2k$ -ten Grades $g_0, g_{k,1}, \dots, g_{k,k}$ bzw. von k ungeraden Polynomen höchstens $(2k-1)$ -ten Grades $h_{k,1}, \dots, h_{k,k}$, die den Orthogonalitätsrelationen genügen:

$$(3) \quad \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} g_0(t)^2 dt &= 1, & \int_{-1}^{+1} g_0(t) g_{k,\nu}(t) dt &= 0, & (\nu = 1, \dots, k) \\ \int_{-1}^{+1} g_{k,\nu}(t) g_{k,\mu}(t) dt &= \delta_{\nu\mu}, & \int_{-1}^{+1} g'_{k,\nu}(t) g'_{k,\mu}(t) dt &= \frac{\delta_{\nu\mu}}{\lambda_{k,\nu}^2}, & (\nu, \mu = 1, \dots, k) \end{aligned}$$

bzw.

$$(4) \quad \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} h_{k,\nu}(t) h_{k,\mu}(t) dt &= \delta_{\nu\mu}, & \int_{-1}^{+1} h'_{k,\nu}(t) h'_{k,\mu}(t) dt &= \frac{\delta_{\nu\mu}}{\sigma_{k,\nu}^2}, & (\nu, \mu = 1, \dots, k) \end{aligned}$$

worin die Konstanten $\lambda_{k,\nu}, \sigma_{k,\nu} > 0$ noch zu bestimmen sind. $g_0(t)$ ist dabei die Konstante $1/\sqrt{2}$. Man folgert hieraus unmittelbar, daß das aus $g_{k,\varrho}$ durch Integration entstehende ungerade Polynom $\gamma_{k,\varrho}(t)$ der Differentialgleichung $\gamma_{k,\varrho}(t) + \lambda_{k,\varrho}^2 \gamma_{k,\varrho}''(t) = C \cdot P_{2k+1}(t)$ genügt mit passender Konstanten C . Daraus ergibt sich

$$(5) \quad g_{k,\varrho}(t) = C \cdot \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu \lambda_{k,\varrho}^{2\nu} P_{2k+1}^{(2\nu+1)}(t), \quad \varrho = 1, \dots, k,$$

worin sich C aus der Normierung (3) bestimmt. Da aus (3) auf $\gamma_{k,\varrho}(\pm 1) = 0$ geschlossen werden kann, folgert man

$$(6) \quad \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu P_{2k+1}^{(2\nu)}(1) \lambda_{k,\varrho}^{2\nu} = 0, \quad \varrho = 1, \dots, k,$$

d. h. $\lambda_{k,1}^2 < \lambda_{k,2}^2 < \dots < \lambda_{k,k}^2$ sind die k Wurzeln ξ der Gleichung

$$(7) \quad \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu P_{2k+1}^{(2\nu)}(1) \xi^\nu = 0.$$

Auf ähnlichem Wege findet man

$$(8) \quad h_{k,\varrho}(t) = C \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \sigma_{k,\varrho}^{2\nu} P_{2k}^{(2\nu+1)}(t), \quad \varrho = 1, \dots, k,$$

und $\sigma_{k,1}^2 < \sigma_{k,2}^2 < \dots < \sigma_{k,k}^2$ sind die k Wurzeln der Gleichung

$$(9) \quad \sum_{\nu=0}^k (-1)^\nu P_{2k}^{(2\nu)}(1) \xi^\nu = 0.$$

Man stellt unschwer fest, daß für $k \rightarrow \infty$ die linken Seiten von (7), (9) im wesentlichen in die cos-Entwicklung übergehen, also

$$\lambda_{k,\varrho} \sim \frac{(2\varrho-1)\pi}{(2k+3/2)^2}, \quad \sigma_{k,\varrho} \sim \frac{(2\varrho-1)\pi}{(2k+1/2)^2}$$

ist. Eine recht mühevolle, fast die Hälfte der Arbeit füllende Abschätzung zeigt genauer:

$$(10) \quad \begin{aligned} \lambda_{k,\varrho} &= \frac{(2\varrho-1)\pi}{(2k+3/2)^2} \left[1 - \frac{(2\varrho-1)^2\pi^2-3}{12 \cdot (2k+3/2)^2} + O((2k+3/2)^{-4}) \right], \\ \sigma_{k,\varrho} &= \frac{(2\varrho-1)\pi}{(2k+1/2)^2} \left[1 - \frac{(2\varrho-1)^2\pi^2-3}{12 \cdot (2k+1/2)^2} + O((2k+1/2)^{-4}) \right], \end{aligned} \quad \varrho = 1, \dots, k$$

und insbesondere für $k \geq 3$

$$(11) \quad \begin{aligned} \lambda_{k,1} &= \frac{\pi}{(2k+3/2)^2} \left[1 - \frac{\pi^2-3}{12 \cdot (2k+3/2)^2} + \frac{R}{(2k+3/2)^4} \right], \\ \sigma_{k,1} &= \frac{\pi}{(2k+1/2)^2} \left[1 - \frac{\pi^2-3}{12 \cdot (2k+1/2)^2} + \frac{R}{(2k+1/2)^4} \right]. \end{aligned} \quad -6 < R < 13$$

Da überdies die Ungleichungen

$$\lambda_{k,1}^{-2} > \sigma_{k,1}^{-2} + 1, \quad \sigma_{k+1,1}^{-2} > \lambda_{k,1}^{-2} + 1$$

bewiesen werden, ist die eingangs gestellte Aufgabe gelöst: Es ist für

$$n = 2k: \quad (12) \quad M_n = \lambda_{k,1}^{-1}, \quad \text{für} \quad n = 2k-1: \quad (13) \quad M_n = \sigma_{k,1}^{-1}.$$

Die gleiche Fragestellung führt Verf. bei der Größe

$$(14) \quad M_n^* = \text{Max} \left[\int_0^\infty e^{-x} F'(x)^2 dx : \int_0^\infty e^{-x} F(x)^2 dx \right]^{1/2}$$

bei Beschränkung auf Polynome $F(x)$ höchstens n -ten Grades durch. Hier handelt es sich um Entwicklungen nach Laguerreschen Polynomen und die Ersetzung der letzteren durch je ein System von n Polynomen $G_{n,\nu}(t)$, $\nu=1, \dots, n$, höchstens n -ten Grades, die den Orthogonalitätsbedingungen.

$$(15) \quad \begin{aligned} G_0(t) &= 1, \quad \int_0^\infty e^{-t} G_0(t) G_{n,\nu}(t) dt = 0, \quad \nu = 1, \dots, n \\ \int_0^\infty e^{-t} G_{n,\nu}(t) G_{n,\mu}(t) dt &= \delta_{\nu\mu}, \quad \int_0^\infty e^{-t} G'_{n,\nu}(t) G'_{n,\mu}(t) dt = \frac{\delta_{\nu\mu}}{\tau_{n,\nu}^2}, \quad \nu, \mu = 1, \dots, n \end{aligned}$$

mit noch zu ermittelnden $\tau_{n,\nu}$ genügen. Man findet auf ähnlichem Wege wie oben

$$G_{n,\varrho}(t) = \frac{C}{n!} \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \tau_{n,\varrho}^{2\nu} \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left(e^t \frac{d^{n+\nu+1}}{dt^{n+\nu+1}} (e^{-t} t^n) \right),$$

während sich $\tau_{n,1}^2 < \tau_{n,2}^2 < \dots < \tau_{n,n}^2$ als die n Wurzeln ξ der Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left(e^t \frac{d^{n+\nu}}{dt^{n+\nu}} (t^n e^{-t}) \right) \Big|_{t=0} \cdot \xi^\nu = 0$$

finden. Es wird

$$\tau_{n,\varrho} = \frac{(\varrho-1/2)\pi}{n+1/2} \left[1 - \frac{(\varrho-1/2)^2\pi^2}{24(n+1/2)^2} + O((n+1/2)^{-4}) \right], \quad \varrho = 1, \dots, n$$

und für $n \geq 2$ genauer

$$\tau_{n,1} = \frac{\pi}{2n+1} \left[1 - \frac{\pi^2}{24(2n+1)^2} + \frac{R}{(2n+1)^4} \right], \quad -\frac{8}{3} < R < \frac{4}{3}.$$

Damit ist auch diese Aufgabe gelöst, da $M_n^* = \tau_{n,1}^{-1}$ wird. Wesentlich einfacher ist die Bestimmung von

$$M_n^{**} = \text{Max} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} F'(x)^2 dx : \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} F(x)^2 dx \right]^{1/2}$$

bei Beschränkung auf Polynome $F(x)$ höchstens n -ten Grades. Die entsprechende Entwicklung nach Hermiteschen Polynomen zeigt nämlich unmittelbar, daß $M_n^{**} = \sqrt{2n}$ ist und gerade von diesen Polynomen erreicht wird. *Harald Geppert (Berlin.)*

Alexits, Georges: Sur la convergence des séries de polynômes orthogonaux. Comment. math. helv. 16, 200—208 (1944).

Soit $\{p_n(x)\}$ un système de polynômes orthogonaux, dans l'intervalle $[-1, 1]$ par rapport à une fonction de densité $w(x) \geq 0$, c'est-à-dire tels que

$$\int_{-1}^1 p_m(x) p_n(x) w(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \neq n, \\ 1 & \text{pour } m = n. \end{cases}$$

Soit

$$(*) \quad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x) \quad (c_n = \int_{-1}^1 p_n(x) f(x) w(x) dx)$$

le développement formel d'une fonction $f(x)$ de carré intégrable suivant le système $\{p_n(x)\}$. Supposons que $w(x)$ est borné: $0 \leq w(x) \leq W$. — Théorèmes: 1. Si on a $|p_n(x)| \leq P$ ($n = 0, 1, \dots$) dans tout l'intervalle $[-1, 1]$, alors la convergence de la série $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \log k$ entraîne la convergence presque partout du développement (*). —

2. Si les inégalités $|p_n(x)| \leq P$ ne sont nécessairement pas vérifiées dans tout l'intervalle $[-1, 1]$, mais seulement dans un sous-intervalle $[a, b]$, alors (*) converge absolument dans $[a, b]$ pour toute fonction $f(x)$ satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > \frac{1}{2}$. — 3. Si $|p_n(x)| \leq P$ dans $[a, b]$, alors on a

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k p_k(x) \right| \leq \sqrt{\frac{8W}{(2r+1)\pi}} \frac{PV}{nr} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

pour toute fonction $f(x)$ dont la dérivée d'ordre r existe presque partout en $[-1, 1]$ et a sa variation totale $\leq V$. En particulier, si $f(x)$ est composée d'un nombre fini g de portions convexes et si elle satisfait à la condition de Lipschitz:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \lambda |x_1 - x_2|,$$

alors

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n c_k p_k(x) \right| \leq \frac{7g\lambda P \sqrt{W}}{2n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Les hypothèses de ces théorèmes se trouvent vérifiées par des classes étendues de polynômes classiques, en particulier par les polynômes de Jacobi $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}$ lorsque $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, la fonction de densité $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ étant bornée dans $[-1, 1]$ et les polynômes étant bornés dans leur ensemble dans tout intervalle fermé intérieur à $[-1, 1]$.

Bela de Sz. Nagy (Szeged).

Selberg, Henrik L.: Über die Darstellung der Dichtefunktion einer Verteilung durch eine Charliersche B -Reihe. Arch. Math. og Naturvid. B 46, Nr 4, 1—12 (1943).

Verf. untersucht die Darstellbarkeit einer Funktion $f(x)$ durch Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Delta^n \Theta(x), \quad \text{wobei} \quad \Theta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\omega) e^{-ix\omega} d\omega$$

ist und $\varphi(\omega)$ die Periode 2π hat und gewissen einfachen Bedingungen genügt. (Ein spezielles $\Theta(x)$ liefert die Charliersche B -Reihe.) — Für $\Theta(x)$ werden zwei Reihenentwicklungen angegeben, für die Konvergenz einer Reihe $\sum c_n \Delta^n \Theta(x)$ notwendige und hinreichende Bedingungen aufgestellt. Zwei solche Reihen stellen nur dann dieselbe Funktion dar, wenn ihre Koeffizienten identisch sind. — Ist $f(x) \geq 0$ und zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durch eine konvergente Reihe $f(x) = \sum c_n \Delta^n \Theta(x)$ darstellbar, ist ferner $\varphi(\omega)$ regulär in $\omega = 0$, so verschwindet $f(x)$ identisch, so daß eine exakte Darstellung von Dichtefunktionen einer Verteilung durch Reihen der obigen Form unmöglich ist.

Günther Schulz (Berlin).

Neder, Ludwig: Ein Satz über die absolute Konvergenz der Fourier-Reihe. *Math. Z.* **49**, 644—646 (1944).

Ist für eine Funktion $f(x)$ der Periode 2π der Stetigkeitsmodul durch $\omega(\delta) = \max |f(x+t) - f(x)|$, $0 \leq x \leq 2\pi$, $|t| \leq \delta$ definiert, so folgt bekanntlich aus $\omega(\delta) \leq C\delta^\alpha$ für $\alpha > \frac{1}{2}$ die absolute Konvergenz der Fourier-Reihe $\mathfrak{S}[f]$ von $f(x)$. Hier wird diese Bedingung auf $\omega(\delta) \leq \frac{C\delta^{1/2}}{\log \frac{1}{\delta} \left(\log \log \frac{1}{\delta} \right)^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$ abgeschwächt.

Ref. bemerkt, daß dieses Ergebnis in einem Satz von S. Bernstein [*C. R. Acad. Sci., Paris* **199**, 397—400 (1934); vgl. dies. Zbl. **9**, 251] enthalten ist, nach dem schon

$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \omega\left(\frac{1}{n}\right) < +\infty$ für die absolute Konvergenz von $\mathfrak{S}[f]$ ausreicht.

Lorentz (Tübingen).

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Watson, G. N.: An infinite integral. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **38**, 323—324 (1942).

Das Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin xu}{1+u^2} du$$

wurde von Copson (vgl. dies. Zbl. **27**, 103) berechnet. Verf. gibt einen neuen Beweis: Er geht aus von der leicht zu bestätigenden Gleichung

$$\sin x = \frac{1}{2i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{2s-1} ds}{\sin \pi s \cdot \Gamma(2s)}, \quad \left(\frac{3}{4} < c < 1; x > 0\right)$$

setzt in I ein und vertauscht im entstehenden Doppelintegral die Integrationsfolge:

$$I = \frac{\pi}{4i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{2s-1}}{\sin^2 \pi s \cdot \Gamma(2s)} ds,$$

woraus nach dem Residuensatz der Wert

$$I = -\mathfrak{S} \sin x \log |x| + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \psi(2\nu+2)$$

folgt.

Harald Geppert (Berlin).

Strscheletzky, M.: Annähernde Lösung des Integrals

$$J_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{iz \cos \omega} \cdot e^{im\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot d\omega.$$

Z. angew. Math. Mech. **23**, 295—296 (1943).

Das Integral des Titels berechnet Verf. in selbstverständlicher Weise durch Anwendung der Entwicklung: $\exp(iz \sin \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(z) \exp(in\alpha)$ und Vertauschung von Summation und Integration.

Harald Geppert (Berlin).

Funktionentheorie:

Rios Garcia, Sixto: Über Umordnung von Funktionenreihen und ihre Anwendungen. *Abh. math. Semin. Hansische Univ.* **15**, 57—81 (1943) [Spanisch].

Verf. zeigt einleitend (§ 2), daß beim Vorhandensein eines Gebiets \mathfrak{A} absoluter Konvergenz durch Umordnung die analytische Fortsetzung der Summe erreicht werden kann, während es beim Fehlen von \mathfrak{A} möglich ist, z. B. Polynomreihen anzugeben, die durch Umordnung gleichmäßig innerhalb eines beliebig vorgebbaren Gebiets gegen eine genau in diesem analytische Funktion konvergieren (§ 4). Im § 3 wird

besonders die Umordnung von Dirichlet-Reihen untersucht; unter einer ungeordneten Dirichlet-Reihe $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ wird verstanden: $\lambda_n \rightarrow +\infty$ (doch nicht notwendig $\lambda_n \uparrow +\infty$), zudem $\sum |e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}|$ gleichmäßig konvergent innerhalb $\Re s > 0$. Für solche ungeordnete Dirichletreihen wird eine Reihe vorbereitender Sätze gegeben, Aussagen, die bei geordneten Dirichlet-Reihen geläufig, aber doch nicht an $\lambda_n \uparrow +\infty$ gebunden sind, z. B.: Aus Konvergenz in s_0 folgt gleichmäßige Konvergenz innerhalb $\Re s > \Re s_0$; die Summe ist also dort regulär analytisch; Existenz einer gemeinen Konvergenzabszisse α und einer absoluten Konvergenzabszisse β ; beide können ausarten; Abschätzungen (wenn $\alpha, \beta > 0$ sind)

$$\alpha \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \sum_{\nu=1}^n a_\nu \right|}{\lambda_n}, \quad \beta \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_{\nu=1}^n |a_\nu|}{\lambda_n}.$$

Im Sonderfall

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0 \quad \text{gilt genauer} \quad \alpha = \beta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |a_n|}{\lambda_n}$$

in Verallgemeinerung einer Bemerkung von Valiron im geordneten Falle; daher kann man hier nicht zur analytischen Fortsetzung durch Umordnung kommen. Wenn für $s = s_0$ die Reihenglieder eine Nullfolge bilden, so gilt absolute Konvergenz für

$$\Re s > \Re s_0 + l, \quad l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\lambda_n}.$$

Daher ist analytische Fortsetzung durch Umordnung höchstens im Streifen $\beta - l < \Re s < \beta$ möglich; schon die Riemannsche Zetareihe zeigt, daß sie nicht zu gelingen braucht: der Pol $s = 1$ hindert sie. Der § 5 beschäftigt sich mit dem Problem der Existenz überkonvergenter Abschnittsfolgen für ungeordnete Potenzreihen und Dirichlet-Reihen in einem Sonderfall. Ulrich (Gießen).

● Obrechhoff, Nikola: Quelques classes de fonctions entières limites de polynômes et de fonctions méromorphes limites de fractions rationnelles. (Actualités scient. et industr. Nr. 891. Exposés sur la théorie des fonctions. Publiés par Paul Montel. XVI.) Paris: Hermann & Cie. 1941. 49 pag.

Es handelt sich im wesentlichen um einen Literaturbericht, in dem Verf. einige eigene Beiträge und Beweisverbesserungen aufreicht. Der erste Teil behandelt Polynomfolgen mit nur positiven oder mit nur reellen Nullstellen und einer zusätzlichen Voraussetzung über gleichmäßige Konvergenz, z. B. auf einem festen Kreis; Dann ist die Grenzfunktion ganz und von angebarbarer Natur der kanonischen Darstellung (Laguerre, Pólya, Montel u. a.). — Der zweite Teil geht von Polynomen obiger Art aus $p(z) = \sum a_\nu z^\nu$ und fragt, welche Faktoren $\varphi(\nu)$ man einstreuen darf derart, daß $P(z) = \sum a_\nu \varphi(\nu) z^\nu$ wieder nur reelle bzw. nur positive Nullstellen habe. Auf klassische Vorstufen von Laguerre und Ergebnisse von Pólya wird eine recht weitgehende Antwort von Pólya-Schur gegeben, die in den $\varphi(\nu)$ die Taylor-Koeffizienten ganzer Funktionen mit nur positiven bzw. nur reellen Nullstellen erkennt. — Der dritte Teil endlich behandelt meromorphe Funktionen als Grenzfunktionen rationaler Folgen; er geht aus von Saxerschen Übertragungen der erstgenannten Sätze Laguerres, behandelt dann Montels „verzahnte“ Funktionen („à termes entrelacés“; Nullstellen und Pole alternierend auf der reellen Achse; vgl. dies. Zbl. 8, 20) und nennt schließlich ohne neue Beweisbemerkungen einige frühere Ergebnisse des Verf. (vgl. dies. Zbl. 9, 262; 16, 34). Ulrich (Gießen).

Pfluger, A.: Über gewisse ganze Funktionen vom Exponentialtypus. Comment. math. helv. 16, 1—18 (1943).

Eine ganze Funktion „vom Exponentialtypus“ — das ist eine Funktion von höchstens Normaltyp der Wachstumsordnung 1, $|\pi(z)| < \exp K|z|$; ihre Nullstellen seien $z_\nu = r_\nu e^{i\theta_\nu}$; $n(r)$ bzw. $n_+(r)$ und $n_-(r)$ deren Anzahl in $|z| \leq r$ bzw. in der rechten und

linken Hälfte dieses Kreises; unter dem Strahltypus von $\pi(z)$ (Indikator) versteht man $h(\vartheta) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\pi(re^{i\vartheta})|}{r}$; dies ist Stützfunktion eines konvexen Bereichs \mathfrak{R} . — Verf. untersucht die gegenseitige Beziehung der Voraussetzungen.

I. \mathfrak{R} ist eine Strecke auf der imaginären Achse,

II. Das Integral $\int_1^\infty \log |\pi(r) \cdot \pi(-r)| \frac{dr}{r^2}$ konvergiert

und der drei Aussagen:

$$\text{A. } \frac{n(r)}{r} \rightarrow 2a > 0, \quad \text{B. } \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_+(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_-(r)}{r} = a, \quad \text{C. } \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\sin \vartheta_\nu|}{r_\nu} < \infty.$$

Nach A haben die Nullstellen positive „Dichte“, nach B sind sie beiderseits gleich dicht und nach C nahe der reellen Achse verteilt. — Verf. zeigt $\text{II} \rightarrow \text{A}$, $\text{II} \rightarrow \text{C}$ und umgekehrt $(\text{A}, \text{C}) \rightarrow \text{II}$; dagegen folgt B erst aus I. — Methode: genaue asymptotische Behandlung kanonischer Produkte im Anschluß an E. Lindelöf. — Die Ergebnisse runden solche von Mary L. Cartwright, Paley-Wiener und Levinson ab.

Ullrich (Gießen).

Montel, Paul: Sur les valeurs algébriques d'une fonction entière ou méromorphe. J. Math. pures appl., IX. s. 20, 305—324 (1941).

Die Arbeit gibt ein neuartiges Normalitätskriterium: Die Schar jener meromorphen Funktionen, die in keinem Punkte eines Gebiets \mathfrak{G} wertgleich sind mit einer festen algebraischen Funktion von mindestens drei Zweigen, ist in \mathfrak{G} normal. Für reguläre Funktionen in \mathfrak{G} genügt es, zwei Zweige vorauszusetzen. Im übrigen kann die Zweigzahl nicht gesenkt werden, wie Beispiele zeigen; doch braucht die algebraische Funktion nicht irreduzibel zu sein: dies führt auf die klassischen Kriterien und Wertverteilungsaussagen für eine feste transzendente meromorphe Funktion. Die Bemerkung des Verf. gestattet eine neue Kette von Wertverteilungsaussagen vom Typus Picard, Landau, Schottky.

Ullrich (Gießen).

Dufresnoy, Jacques: Remarques sur les fonctions méromorphes dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé. Bull. Soc. Math. France 70, 40—45 (1942).

Drei Beweiswege dafür, daß die Ahlforsschen Scheibensätze schon in der Umgebung einer isolierten wesentlichen Singularität gelten und nicht bloß für meromorphe Funktionen in der endlichen Ebene: es wird also der Schritt vom sog. kleinen zum großen Picardschen Satz übertragen.

Ullrich (Gießen).

Seidel, W., and J. L. Walsh: On approximation by euclidean and non-euclidean translations of an analytic function. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 916—920 (1941).

Wie G. D. Birkhoff zeigte [C. R. Acad. Sci., Paris 189, 473—475 (1929)], gibt es eine ganze Funktion $F(z)$ mit der Eigenschaft, daß sich jede beliebige ganze Funktion $g(z)$ in der Gestalt $(1) \lim_{n \rightarrow \infty} F(z + a_n) = g(z)$ darstellen läßt, wobei die Folge $\{a_n\}$, $(n = 1, 2, \dots)$ von $g(z)$ abhängt. (1) gilt für jeden Wert von z , und die Konvergenz ist auf jeder beschränkten abgeschlossenen Punktmenge eine gleichmäßige. — In der vorliegenden Arbeit wird zunächst der Satz von G. D. Birkhoff dahin verallgemeinert, daß durch (1) nicht nur jede ganze Funktion gegeben werden kann, sondern auch jede in einem einfach zusammenhängenden Bereiche reguläre Funktion. Vgl. hierzu auch A. Roth, dies. Zbl. 20, 235. Ferner wird zu dem so erhaltenen Ergebnis das kreisgeometrische Analogon bewiesen, welches lautet: Es existiert eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion $\Phi(z)$, so daß für jede in R reguläre Funktion $\varphi(z)$, wenn R einen einfach zusammenhängenden Teilbereich von $|z| < 1$ bedeutet, $(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{z + \alpha_n}{1 + \bar{\alpha}_n z}\right) = \varphi(z)$ ist, worin die Folge $\{\alpha_n\}$, $(n = 1, 2, \dots)$ von $\varphi(z)$ abhängt. (2) gilt für jeden Wert von z aus R und sogar gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen Punktmenge, welche nur aus Punkten von R besteht.

Lammel (Prag).

Monna, A. F.: Sur les fonctions univalentes. Akad. Wetensch., Amste. lam, Proc. 45, 826—832 (1942).

In seiner Arbeit (vgl. dies. Zbl. 26, 401) gab Verf. eine Schätzung des harmonischen Maßes von ähnlichem Typus, wie sie im Beweis des Randstellensatzes von Denjoy-Carleman-Ahlfors geläufig ist. Hier gibt er neue Anwendungen davon auf schlichte beschränktartige Funktionen $F(z) = a_1 z + \dots$ in $|z| < 1$; nach Fatou existieren die Randwerte längs fast aller Radien, kurz $F(e^{i\vartheta})$; ist $F(z) \neq w_0$ in $|z| < 1$, so wird das Maß der ϑ -Menge geschätzt, wo $|F(e^{i\vartheta}) - w_0| \geq R > 0$ bleibt. Die Methode gestattet u. a. eine Verschärfung des Satzes von Löwner und eines darauf begründeten Ergebnisses von Unkelbach.

Ullrich (Gießen).

Wolff, Julius: Inégalités remplies par les dérivées des fonctions holomorphes, univalentes et bornées dans un demi-plan. Comment. math. helv. 15, 296—298 (1943).

Vereinfachter Beweis (ein Lemma von H. Cartan wird durch die Methode von dies. Zbl. 26, 218 vermieden) des Satzes: $f(z)$ sei regulär, schlicht und beschränkt für $\Re z > 0$; dann enthält die y -Achse eine „Schöpfmenge“ (vgl. dies. Zbl. 27, 57 Wolff) von Punkten, für die bei jeder Annäherungsart von z an it

$$f'(z) = O\left(\frac{1}{x} \sqrt{|z - it|}\right)$$

ist. Zweitens zeigt Verf. in Umkehrung der Tatsache, daß $xf'(z) \rightarrow 0$ strebt, das Vorhandensein einer gewissen Menge it , so daß für alle Kurven $|y - t| = x^p$ ($0 < p < \infty$) $\lim_{z \rightarrow it} x^{1-p} |f'(z)| = \infty$ wird.

Ullrich (Gießen).

Ferrand Jacqueline: Sur un théorème de M. Golusin. C. R. Acad. Sci., Paris 215, 254—255 (1942).

Der Satz von Golusin lehrt folgendes: $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ bilde den Einheitskreis schlicht in ein Gebiet \mathfrak{G} ab. Es sei \mathfrak{G}^* der größte in \mathfrak{G} enthaltene Stern, $h(\vartheta)$ der kleinste Ursprungsabstand der Randpunkte von \mathfrak{G}^* auf dem Halbstrahl ϑ ; dann gilt für jedes $f(z)$

$$\int_0^{2\pi} \log h(\vartheta) \cdot d\vartheta \geq 0.$$

Verf. beurteilt die vorliegenden Beweisansätze dazu als lückenhaft und gibt selbst eine neue Beweisskizze (vgl. Golusin, dies. Zbl. 16, 216; 17, 407; Bermant, dies. Zbl. 18, 143; Biernacki, dies. Zbl. 25, 405).

Ullrich (Gießen).

Ferrand, Jacqueline: Sur les fonctions holomorphes dans une couronne. Bull. Sci. math., II. s. 67, 42—49 (1943).

Ausführung der Gedanken der vorstehend besprochenen Note unter Verallgemeinerung auf Ringgebiete. Die Beweismethode gehört zum Gedankenkreis des Randverzerrungssatzes von Ahlfors.

Ullrich (Gießen).

Kronsbein, J.: Analytical expressions for some extremal schlicht functions. J. London Math. Soc. 17, 152—157 (1942).

In Ergänzung einer schönen Untersuchung von H. Grötzsch [Extremalprobleme der konf. Abbildung, Ber. Sächs. Akad. Wiss. 80, 367—376, 497—502 (1928)] gibt Verf. analytische Ausdrücke für die dort geometrisch gekennzeichneten Extremalabbildungen. Den Ausgangspunkt bildet die Abbildung eines Ellipsenvierecks (große Achse, Halbellipse; 2 Scheitel, 2 Brennpunkte) bzw. daran anschließend eines Ellipseninneren selbst in den Einheitskreis; mittels der Jacobischen sn , dn kann die Aufgabe im wesentlichen durch einfache Zusammensetzungen erledigt werden.

Ullrich (Gießen).

Spencer, D. C.: On finitely mean valent functions. Proc. Lond. Math. Soc., II. s. 47, 201—211 (1941).

Nach einer Anregung von Littlewood wird eine im Einheitskreis \mathfrak{E} reguläre Funktion $f(z) = w$ im Mittel p -wertig genannt, wenn das Riemannsche Bildflächenstück \mathfrak{B}_1 des \mathfrak{E} über jedem Kreis $|w| \leq R$ einen Inhalt $W(R) \leq p \cdot R^2 \pi$ hat; es ist $p \geq 1$ aber beliebig, auch unganzzahlig zu nehmen. Verf. spricht von schwacher p -Wertig-

keit im Mittel, wenn für jeden konzentrischen Teilkreis $|z| \leq \varrho < 1$ von \mathfrak{G} der Gesamtinhalt $A(\varrho)$ des Riemannschen Bildflächenstücks \mathfrak{B}_ϱ der Ungleichung

$$A(\varrho) \leq p \cdot M(\varrho, f)^2 \pi, \quad M(\varrho, f) = \max_{|z| \leq \varrho} |f(z)|$$

genügt. — Es werden nun einige Schätzungen angegeben für die Mittelwerte $M_\lambda(\varrho, f)$ (vgl. nachstehendes Referat), wobei neben p -Wertigkeit im Mittel noch ein nicht zu starkes Wachstum für $|z| \rightarrow 1$ vorausgesetzt wird, genauer

$$M(\varrho, f) \leq C(1 - \varrho)^{-\alpha}, \quad \alpha \geq 0;$$

dann ist z. B.

$$M_\lambda(\varrho, f) \leq C \cdot K(p, \lambda) \cdot (1 - \varrho)^{-\alpha + \frac{1}{\lambda}}, \quad M_\lambda(\varrho, f') \leq C \cdot K(p, \lambda, \alpha) (1 - \varrho)^{-\alpha - 1 + \frac{1}{\lambda}},$$

letzteres nur für $\lambda > 1/(\alpha + \frac{1}{2})$; $K(p, \lambda)$ bezeichnet eine Konstante mit Abhängigkeit von p, λ . — Daraus folgt insbesondere ein Koeffizientensatz: für

$$f(z) = \sum a_n z^n \quad \text{ist} \quad |a_n| \leq C \cdot K(p, \alpha) \cdot n^{\alpha-1} \quad \text{bei} \quad \alpha > \frac{1}{2}.$$

Die Sätze haben zahlreiche länger bekannte Entsprechungen bei schlichten oder im gewöhnlichen Sinne p -wertigen Funktionen. Es wird die Genauigkeit der Einschränkungen über λ, α erörtert und festgestellt, daß die geringere Voraussetzung schwacher p -Wertigkeit im Mittel i. a. nicht ausreichen kann, um die Aussagen zu sichern. — (Ein zweiter Teil der Arbeit erschien schon früher als dieser erste (vgl. dies. Zbl. 25, 259; vgl. auch dies. Zbl. 24, 220, 221 und 27, 55). Ullrich (Gießen).

Fuchs, W. H. J.: A uniqueness theorem for mean values of analytic functions. Proc. London Math. Soc., II. s. 48, 35—47 (1943).

$f(z)$ sei im Kreisring $a < |z| = r < b$ regulär analytisch; man bilde für ein festes r das Mittel der festen positiven Ordnung λ

$$M_\lambda(r, f) = \left\langle \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\lambda d\varphi \right\rangle^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Für zwei Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ derselben Art sei die Übereinstimmung ihrer Mittel bei festem λ und für eine r -Folge bekannt, die sich in (a, b) häuft, z. B.

$$M_\lambda(r, f) = M_\lambda(r, g) \quad \text{für} \quad r = r_n \rightarrow R, \quad a < R < b.$$

Ingham vermutete, daß dann die Gleichung schon für alle r in (a, b) gilt. Verf. beweist es. — Er macht darauf aufmerksam, daß die Aussage nur bei positivem λ stimmt; für $\lambda \rightarrow +0$ entsteht bekanntlich das geometrische Mittel

$$M_\lambda(r, f) \rightarrow \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi \right\} = M_0(r, f) \quad (\text{Definition});$$

für $\lambda \rightarrow \infty$ entsteht das Betragmaximum

$$M_\lambda(r, f) \rightarrow \max_{|z|=r} |f(z)| = M(r, f) = M_\infty(r, f).$$

In beiden Fällen gibt man leicht Gegenbeispiele.

Ullrich (Gießen).

Popovăţ, P.: Sur une propriété générale de certaines fonctions algébriques. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 24, 71—78 (1941).

Es handelt sich um algebraische Funktionen, welche durch Gleichsetzen zweier rationalen Funktionen entstehen,

$$\frac{A(y)}{B(y)} = \frac{C(x)}{D(x)} \quad (A, B, C, D \text{ Polynome})$$

vom Grade m links, n rechts. Die „allgemeine Eigenschaft“ besteht in der Möglichkeit, die y - und x -Ebene in m bzw. n einfach zusammenhängende Gebiete zu zerlegen,

die durch die algebraische Funktion so zugeordnet werden, daß jedes der x -Gebiete auf jedes der y -Gebiete eindeutig bezogen wird. Nur die algebraischen Funktionen haben diese Eigenschaft, deren definierende Gleichung $F(x, y) = 0$ Trennung der Veränderlichen wie oben gestattet.

Ulrich (Gießen).

Speiser, Andreas: Über symmetrische analytische Funktionen. *Comment. math. helv.* **16**, 105—114 (1943).

Die klassischen Überlagerungsflächen der elliptischen Integrale und der einfachsten Modulfunktionen, sowie des hyperelliptischen Falles (Geschlecht 2) werden vom Verf. derart besprochen, daß unter Voranstellung der Gruppenstruktur der Zugang zu den ihnen eigentümlichen Funktionen gewonnen wird.

Ulrich (Gießen).

Denjoy, Arnaud: Les continus cycliques et la représentation conforme. *Bull. Soc. Math. France* **70**, 97—124 (1942).

Schon 1933 hat Verf. in einigen CR-Noten den Begriff des zyklischen Kontinuums eingeführt und nach verschiedenen Richtungen hin behandelt (vgl. dies. Zbl. **7**, 329;

8, 86). Er zeigt jetzt: Wenn $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ den Einheitskreis in ein Gebiet \mathfrak{G} mit dem

Rande \mathfrak{C} konform abbildet, so ist notwendig und hinreichend für die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe bis auf den Rand \mathfrak{C} , daß \mathfrak{C} ein zyklisches Kontinuum sei. — Jordankurven und Jordanbogen sind das; so wird ein Grundergebnis von Fejér in den neuen Satz eingeordnet. Die zyklischen Kontinua werden im Zuge des Beweises geometrisch und analytisch gekennzeichnet; sie enthalten nur endlich viele getrennte Teilkontinua vom Durchmesser $> \varepsilon$ im Gefolge ihrer gleichmäßigen Stetigkeit und erscheinen als Ränder von Gebieten. Insbesondere enthalten sie keine Primenden. — Als ein interessantes Nebenergebnis wird festgestellt: Bildet $f(z) = w$ den Einheitskreis schlicht ab mit gleichmäßiger Konvergenz auf dem Rande, so bilden die Stellensorten w_0 , welche auf $|z| = 1$ mindestens drei Punkte haben ($f(e^{i\vartheta}) = w_0$ mindestens 3 Lösungen $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \dots$), eine abzählbare Punktmenge. — Die Methodik gibt noch Anlaß zu einigen weiteren Bemerkungen. — Die vom Verf. S. 122 betonte J. Wolff zugeschriebene Anwendung der Schwarzschen Ungleichung im Bereich der Randabbildung ist doch älteren Datums. Eine entscheidende neue Phase ist durch die Anwendung von Lars V. Ahlfors 1929 eingeleitet worden (Lindelöf-Festschrift Helsinki 1929).

Ulrich (Gießen).

Warschawski, S. E.: On conformal mapping of infinite strips. *Trans. Amer. Math. Soc.* **51**, 280—335 (1942).

Es ist das Ziel der Arbeit, die Randverzerrungsaussagen der These von Ahlfors [*Acta Soc. Sci. Fennicae N. s. A* **1**, Nr 9 (1930)] zu vertiefen und dadurch Fortschritte für das Verhalten der konformen Abbildung auf dem Gebietsrande zu erreichen; dabei werden besonders Ecken und Spitzen behandelt, über Ergebnisse von Ostrowski [*Acta math* **64**, 81—184 (1935) und *Prace mat.-fiz.* **44**, 371—471 (1937); vgl. dies. Zbl. **12**, 25; **20**, 238] hinaus. — Die Ahlforsschen Untersuchungen gehen aus von der Abbildung eines „horizontalen“ Streifens \mathfrak{S}_w in einen Normalstreifen \mathfrak{N}_z , $|y| < \frac{\pi}{2}$, mit Zuordnung von $w \rightarrow +\infty$ und $z \rightarrow +\infty$, und schätzen die Erstreckung $x_2 - x_1$ des z -Bildes für einen Ausschnitt (u_1, u_2) von \mathfrak{S}_w nach unten allgemein und nach oben unter Symmetrieannahmen über \mathfrak{S}_w : ist \mathfrak{S}_w durch $\Phi_-(u) < v < \Phi_+(u)$ mit stetigen Randfunktionen Φ beschrieben, so geht dabei wesentlich die Streifenbreite $\Theta(u) = \Phi_+(u) - \Phi_-(u)$ ein:

$$(A) \quad \pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\Theta(u)} \leq x_2 - x_1 + 4\pi.$$

Verf. vermag diese Ungleichung unter Zusatzannahmen über die Randstruktur

auf interessante Art weiterzuführen: Er legt den von Lindelöf gefaßten und nach ihm benannten Begriff der L -Tangente zugrunde: Sehnenrichtung für zwei beliebige Punkte p_1, p_2 strebt gegen Tangentenrichtung $\operatorname{tg} \gamma$ in p , wenn zugleich $p_1 \rightarrow p, p_2 \rightarrow p$ gilt; er überträgt dies für $p = +\infty$ (γ nennt er Grenzsteigung) und spricht von L -Ecken und L -Spitzen in endlichen p , L -Streifen für $p = +\infty$, wenn beide Randbogen, die in p münden, diesen Tangententypus zeigen. Im wesentlichen durch diese Einschränkung wird es ermöglicht, auch eine obere Schätzung von $x_2 - x_1$ vom Typus (A) ohne die Ahlforssche Symmetrieforderung an \mathfrak{S}_w zu gewinnen und sogar zu einer asymptotischen Erfassung von $x_2 - x_1$ für L -Streifen zu kommen. Es ist passend, dabei die Mittellinie des Streifens $\Psi(u) = \frac{1}{2} \langle \Phi_+(u) + \Phi_-(u) \rangle$ zu benutzen. Für den Fall eines L -Streifens \mathfrak{S}_w mit der Grenzsteigung $\gamma = 0$ gelten dann diese beiden Grundungleichungen:

$$(W_I) \quad x(w_2) - x(w_1) \leq \pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \Psi'^2(u)}{\Theta(u)} du + \frac{\pi}{12} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\Theta'^2(u)}{\Theta(u)} du + o(1);$$

$$(W_{II}) \quad x(w_2) - x(w_1) \geq \pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \Psi'^2(u)}{\Theta(u)} du - \frac{\pi}{4} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\Theta'^2(u)}{\Theta(u)} du + o(1),$$

die zweite noch unter der Zusatzforderung: $\Phi'_\pm(u)$ stetig und von beschränkter Schwankung. Ausdehnung für Grenzsteigung $\gamma \neq 0$ ist unschwer möglich. — Auf diesen Ergebnissen ruhen einige Aussagen über die Abbildungsfunktionen $z(w)$ und $w(z)$ für $\mathfrak{S}_w \leftrightarrow \mathfrak{R}_z$, so z. B. (L -Streifen, $\gamma = 0$; Übertragung für $\gamma \neq 0$ möglich)

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} z(w): \int_{u_0}^u \frac{dt}{\Theta(t)} = \pi \quad \text{gleichmäßig in } v, \quad w \text{ in } \mathfrak{S}_w;$$

umgekehrt gilt für $u = u(z)$ gleichmäßig auf dem Teilstreifen $|y| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |w'(z)| : \Theta(u) = \frac{1}{\pi}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|z|} \log |w'(z)| = 0;$$

die Geraden $y = \eta$ aus \mathfrak{R}_z endlich gehen in Kurven über, die durch

$$v = f_\eta(u) = \Psi(u) + \frac{\eta}{\pi} \Theta(u) + o[\Theta(u)]$$

dargestellt werden. Das sind zum Teil Ausdehnungen von Ergebnissen bei Carathéodory und Ostrowski. — Im letzten Teile der Arbeit werden die Ergebnisse für einen endlichen Randpunkt p an Stelle von $+\infty$ umgeschrieben und auf das Randverhalten der konformen Abbildung angewendet. Dabei wird insbesondere die Existenz einer Winkelderivierten erörtert und gezeigt, daß ein Ergebnis des Verf. zwar nicht die schärfste Aussage Ahlfors' erreicht wegen der spezielleren Annahmen über die Randstruktur, aber umgekehrt doch nicht von ihr umfaßt wird (Beispiel).

Ullrich (Gießen).

Wirtinger, Wilhelm: Zur Theorie der konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen. Abh. preuß. Akad. Wiss., Math.-naturwiss. Kl. 1942, 1—9 (Nr. 4).

Wirtinger stützt sich auf Ideen der Doktorarbeit von Schottky, um aus der Theorie der algebraischen Funktionen zu beweisen, daß ein Gebiet mit $p + 1$ nicht-punktförmigen getrennten Randkurven \mathfrak{L}_π konform in die $p + 1$ -blättrig überdeckte obere Halbebene (mit ebenso vielen getrennten Rändern \mathfrak{R}_π über der reellen Achse) abgebildet werden kann; je ein Punkt von \mathfrak{L}_π kann einem auf \mathfrak{R}_π noch frei zugeordnet werden (vgl. Grunsky, dies. Zbl. 26, 220).

Ullrich (Gießen).

Grunsky, Helmut: Eindeutige beschränkte Funktionen in mehrfach zusammenhängenden Gebieten. 2. Jber. Dtsch. Math.-Verein. 52, Abt. 1, 118—132 (1942).

Für die Problemstellung und Teil I vgl. dies. Zbl. 24, 222. Verf. trägt nun den Beweis des dort unerledigt gebliebenen 1. Satzes nach, indem er diesen gleich verallgemeinert zu folgender Aussage: Der Rand eines $n+1$ -fach zusammenhängenden, schlichten Jordangebiets \mathfrak{G} sei irgendwie als Summe von Bögen zusammengesetzt:

$\mathfrak{C} = \sum_{\lambda=1}^l \mathfrak{C}_\lambda$; in \mathfrak{G} sei eine Punktfolge $z_0^{(\mu)}$ vorgegeben, ferner ein Aufpunkt z^* . Es wird

die Klasse aller Funktionen betrachtet, die in \mathfrak{G} eindeutig, regulär, beschränkt sind, in allen z_0 verschwinden und auf \mathfrak{C}_λ kleingleich gegebenen m_λ bleiben. In dieser Klasse gibt es mindestens eine Extremalfunktion $F(z)$, für die $|F(z^*)|$ ein absolutes Maximum erreicht; diese hat in \mathfrak{G} höchstens n Nullstellen außer den z_0 und zeigt die Randwerte m_λ für \mathfrak{C}_λ . Die Gesamtheit der $F(z)$ hängt wesentlich von z^* ab. — Verallgemeinerung unter Beachtung von Vielfachheiten der z_0 und Einrücken von j Stellen z_0 in z^* ; dann ist $|F^{(j)}(z)| = \text{Max}$ zu fordern.

Ulrich (Gießen).

Lammel, Ernst: Anwendung der Funktionentheorie auf die Theorie der Potentialströmungen um von Kreisen gebildete Profile. Mh. Math. Phys. 51, 24—34 (1943).

Verf. will eine weitere Methode geben zur vollständigen Aufstellung der allgemeinsten Potentialströmung mit dem komplexen Strömungspotential $w(z)$ um das von zwei Kreisen gebildete Profil.

Ulrich (Gießen).

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Hecke, E.: Herleitung des Euler-Produktes der Zetafunktion und einiger L -Reihen aus ihrer Funktionalgleichung. Math. Ann. 119, 266—287 (1944).

Die Kennzeichnung der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$ durch Funktionaleigenschaften wurde bisher entweder durch sehr weitgehende Forderungen (Hamburger) oder durch Benutzung der Eigenschaften und der expliziten Reihenentwicklung eines ϑ -Nullwertes (Hecke) bewirkt. Beide Begründungen liefern das Koeffizientengesetz von $\zeta(s)$ als rein rechnerische Tatsache und das für die Anwendungen fundamentale Euler-Produkt als noch spätere Folgerung. Hier zeigt Verf., daß sich das Koeffizientengesetz von $\zeta(2s)$, d. h. das des $\zeta(2s)$ durch die Mellinsche Formel zugeordneten ϑ -Nullwertes $\vartheta(\tau)$, lediglich aus Transformationseigenschaften der Modulform $\vartheta(\tau)$ ohne Kenntnis ihrer Fourier-Entwicklung gewinnen läßt; dabei ergibt sich dieses Koeffizientengesetz in der Weise, daß aus den Transformationseigenschaften von $\vartheta(\tau)$ sogleich auf die Existenz und die explizite Gestalt der Eulerschen Produktentwicklung von $\zeta(2s)$ geschlossen wird. — Die Problemstellung erfordert eine Untersuchung von Modulformen halbzahlicher Dimensionen; zum Verständnis werde kurz an die Verhältnisse bei ganzzahliger Dimension erinnert. Bezeichnet $D(s)$ die Dirichletreihe, die durch die Mellinsche Formel einer Modulform $\varphi(\tau)$ von zunächst ganzzahliger Dimension entspricht, so weiß man, daß die Existenz einer Eulerschen Produktentwicklung für $D(s)$ in bestimmter Weise mit der Existenz von gewissen linearen Operatoren T_p zu jeder Primzahl p zusammenhängt, welche mit Hilfe von ganzzahligen linearen Transformationen der Determinante p auf die Variable τ erklärt sind (vgl. dies. Zbl. 15, 402; 16, 355). Bei ganzzahliger Dimension existieren solche Operatoren stets, ihre Bestimmung ist im wesentlichen auf nur eine Art möglich, und jeder Operator führt alle Modulformen $\varphi(\tau)$ von gegebener Stufe und Dimension in Modulformen der gleichen Stufe und Dimension über. Versteht man nun unter der Abspaltung eines p -Faktors aus $D(s)$, daß $D(s)$ in zwei Dirichletreihen als Faktoren zerlegt werden kann, in deren einem nur über die zu p teilerfremden natürlichen Zahlen, in deren anderem nur über die Potenzen von p summiert wird, so gilt — immer noch bei ganzzahliger Dimension —: Aus $D(s)$ läßt sich dann und nur dann ein p -Faktor abspalten, wenn die $D(s)$ zugeordnete Modulform

$\varphi(\tau)$ Eigenfunktion des Operators T_p ist. — In der vorliegenden Abhandlung werden diejenigen ganzen Modulformen $\varphi(\tau)$ negativer halbzahliger (nicht ganzer) Dimension untersucht, welche sich als Potenzprodukte von $\vartheta(\tau)$ und $\eta(\tau) = \sqrt[24]{\Delta(\tau)}$ darstellen lassen. Hier zeigt sich, sehr im Gegensatz zu der Theorie für ganzzahlige Dimension, daß ein Operator T_p der angedeuteten Art im allgemeinen für kein p existiert. Wenn jedoch ausnahmsweise eine dieser Modulformen $\varphi(\tau)$ durch einen solchen Operator in eine Modulform der gleichen Stufe übergeht, so existieren $(p+1)/2$ verschiedene Operatoren dieser Art, und alle führen $\varphi(\tau)$ in Null über. Ferner läßt sich dann aus der $\varphi(\tau)$ zugeordneten Dirichletreihe $D(s)$ ein p -Faktor sehr einfacher Bauart abspalten. Die gesuchte Kennzeichnung für einige dieser Dirichletreihen $D(s)$ folgt nun aus dem Nachweis, daß der beschriebene Ausnahmefall bei den Modulformen $\varphi(\tau) = \eta(\tau)$, $\vartheta(\tau)$, $\eta^3(\tau)$, $\eta^4(\tau)\vartheta^{-1}(\tau)$ für alle Primzahlen $p > 3$ tatsächlich vorliegt. Wesentlich ist hierbei, daß es gelingt, diesen Nachweis ohne Benutzung der Reihenentwicklungen der genannten vier Modulformen zu führen; aus diesen Reihenentwicklungen wäre der fragliche Sachverhalt unmittelbar ersichtlich zu machen. Die Existenz des Operators T_p wird vielmehr durch einen Induktionsschluß von den Primzahlen $p' < p$ auf die Primzahl p begründet, und dadurch werden die zugehörigen Dirichletreihen Schritt für Schritt von vornherein als Eulerprodukte aufgebaut. — Die den vier Modulformen $\varphi(\tau)$ entsprechenden Dirichletreihen sind in der oben angegebenen Reihenfolge: $L(2s, \chi)$ (χ der eigentliche Restcharakter mod 12), $2\zeta(2s)$, $L(2s-1, \chi)$ ($\chi(n) = \left(\frac{-4}{n}\right)$), $L(2s-1, \chi)$ ($\chi(n) = \left(\frac{n}{3}\right)$). Petersson (Straßburg).

Bohr, Harald: Über S-fastperiodische Funktionen mit linear unabhängigen Exponenten. Norsk mat. Tidsskr. 26, 33—40 (1944) [Norwegisch].

Definiert man die Norm der für $-\infty < x < +\infty$ definierten Funktion $\varphi(x)$ durch

$$(1) \|\varphi(x)\| = \overline{\lim}_{-\infty < x < +\infty} |\varphi(x)| \text{ mit der Einschränkung der Stetigkeit von } \varphi(x) \text{ bzw.}$$

$$(2) \|\varphi(x)\|_S = \overline{\lim}_{-\infty < x < +\infty} \int_x^{x+1} |\varphi(t)| dt, \text{ bzw. } (3) \|\varphi(x)\|_{S_2} = \sqrt{\overline{\lim}_{-\infty < x < +\infty} \int_0^1 |\varphi(t)|^2 dt},$$

so heißt $f(x) = u(x) + iv(x)$ im gewöhnlichen (g.), Stepanoffschen (S) oder S_2 -Sinne fast-periodisch (f.p.), wenn sich zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dichte Menge von Verschiebungszahlen $\tau_\varepsilon(\varepsilon) = \tau$ finden läßt, so daß im Sinne der Normen (1) bzw. (2) bzw. (3) $\|f(x+\tau) - f(x)\| \leq \varepsilon$ ist. Zu jeder derartigen Funktion gehört eine Fourierreihe

$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(i\lambda_n x)$ mit reellen A_n und komplexen λ_n ; dabei heißen die λ_n linear unabhängig, wenn es bei beliebigem m keine Relation $\sum_{v=1}^m h_v \lambda_v = 0$ mit ganzen, nicht sämtlich verschwindenden h_v gibt. Die Fourierreihe einer g.f.p.-Funktion mit linear unabhängigen λ_n ist absolut und gleichmäßig konvergent; es konvergiert nämlich

$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$. Der Satz gilt aber nicht für S.- und S_2 -f.p.-Funktionen. Denn Verf. zeigt, daß zu jeder willkürlich vorgegebenen komplexen Zahlenfolge A_v , für die $\sum_{v=1}^{\infty} |A_v|^2$

konvergiert (ohne daß dies bei $\sum_{v=1}^{\infty} |A_v|$ der Fall zu sein braucht), sich eine linear-unabhängige Zahlenfolge λ_v bestimmen läßt derart, daß $\sum_{v=1}^{\infty} A_v \exp(i\lambda_v x)$ die Fourierreihe einer S_2 - (also erst recht S.-) f.p.-Funktion wird. Die Konvergenz von $\sum_{v=1}^{\infty} |A_v|^2$

ist für die Fourierreihen von S_2 -f.p.-Funktionen notwendig, aber keineswegs allein hinreichend. Der oben für g.f.p.-Funktionen ausgesprochene Satz bleibt aber auch für S.-f.p.-Funktionen gültig, wenn man noch die Voraussetzung hinzunimmt, daß die Exponenten λ_v beschränkt sein sollen, d. h.: Ist $\sum_{v=1}^{\infty} A_v \exp(i\lambda_v x)$ die Fourierreihe

einer S.-f.p.-Funktion mit linear-unabhängigen und beschränkten Exponenten A_ν , so ist $\sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu|$ konvergent.

Harald Geppert (Berlin).

Fan, Ky: Les fonctions asymptotiquement presque périodiques d'une variable entière et leur application à l'étude de l'itération des transformations continues. Math. Z. 48, 685—711 (1943).

Hauptresultat der Arbeit ist folgender Satz: Sei E ein kompakter und abgeschlossener metrischer Raum mit den Punkten x . Sei $x' = T'x$ eine eindeutige und stetige Abbildung von E auf einen Teil von E . Die Iterierten $T^n x$, $n = 1, 2, \dots$, seien gleichgradig stetig in E . Dann ist für jeden Punkt x_0 die Punktfolge $T^n x_0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, betrachtet als Funktion der ganzzahligen Variablen n , asymptotisch fastperiodisch: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein natürliches N und eine relativ dichte Menge natürlicher Zahlen τ , derart, daß für jedes solche τ

$$\text{Distanz } (T^{n+\tau} x_0, T^n x_0) < \varepsilon \quad \text{für } n \geq N$$

ausfällt. Ist T eine umkehrbare eindeutige Abbildung von E auf sich selbst, so ist die Folge $T^n x_0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, im strikten Sinne fastperiodisch. Der Beweis jenes Satzes ist ganz analog dem Beweise dieses seit langem bekannten Theorems [vgl. Ph. Franklin, Almost periodic recurrent motions. Math. Z. 30, 325—331 (1929)]. Aus der asymptotischen Fastperiodizität folgt: Für in E stetiges $f(x)$ existiert in jedem x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} f(T^n x).$$

Die Beweise sind sehr ausführlich dargestellt.

E. Hopf (München).

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Fan, Ky: Sur le comportement asymptotique des solutions d'équations linéaires aux différences finies du second ordre. Bull. Soc. Math. France 70, 76—96 (1942).

Anknüpfend an zwei Noten des Ref. betreffend lineare Differentialgleichungen [Math. Z. 48, 212—220 u. 289—292 (1942); vgl. dies. Zbl. 27, 60, 61] behandelt Verf. die entsprechenden Fragen bei linearen Differenzengleichungen zweiter Ordnung: (1) $\Delta^2 y(n) + g(n) \Delta y(n) + f(n) y(n) = h(n)$, $n = 1, 2, \dots$. Es zeigt sich, daß die Beh. und Bew. bei Differentialgleichungen sich ganz entsprechend auf Differenzengleichungen übertragen; außerdem fügt Verf. einige weitere Feststellungen hinzu, welche für Differentialgleichungen bisher nicht besprochen wurden. Die Ergebnisse lauten: I. Sind $\sum |r(n)|$ mit $r(n) = ng(n) + n^2 f(n)$, $\sum |g(n)|$ und $\sum nh(n)$ konvergent, so genügt jede Lösung $y(n)$ von (1) der Bedingung: (I) $\lim (y(n) - n \Delta y(n))$ existiert eigentlich (für $n \rightarrow +\infty$). — II. konvergiert zwar $\sum |g(n)|$ und $\sum nh(n)$, nicht aber $\sum r(n)$ und ist $r(n) \geq 0$ oder $r(n) \leq 0$ für schließlich alle n , so gilt für jede der Bed. (I) genügende Lösung von (1) (falls eine solche Lösung existiert) die Bedingung: (II) $\lim y(n)$ existiert eigentlich und $\lim n \Delta y(n) = 0$; aus dieser Aussage erhält man eine zweite, wenn man $r(n)$ und $g(n)$ vertauscht und $\lim (y(n) - n \Delta y(n)) = 0$ an Stelle der Bed. (II) treten läßt. — III. Konvergieren $\sum |g(n)|$, $\sum |nf(n)|$ und $\sum nh(n)$, so besitzt (1) unendlich viele, der Bed. (II) genügende Lösungen; unter diesen gibt es für hinreichend großes a genau eine mit $y(a) - a \Delta y(a) = c$ für beliebiges c (unabhängig von a). — IV. Zu den gleichen Vor. wie in III. werde noch hinzugenommen: Weder genügt jede Lösung von (1) der Bed. (II) noch existiert eine natürliche Zahl $k > 0$ derart, daß alle der Bed. (II) genügenden Lösungen von (1) für $n = k$ den gleichen Wert annehmen. Dann gibt es eine lineare Differenzengleichung 1. Ordnung, deren Lösungsgesamtheit identisch ist mit der Gesamtheit aller, der Bed. (II) genügenden Lösungen von (1). (Dieser Satz rührt von Fréchet her.) — V. Konvergieren $\sum |g(n)|$ und $\sum nh(n)$, nicht hingegen

$\sum nf(n)$, ist ferner $g(n) + nf(n) \geq 0$ oder ≤ 0 für schließlich alle n , so genügt jede die Bed. (I) erfüllende Lösung von (1) auch der Bed. (II), und zwar mit $\lim y(n) = 0$. — VI. Konvergieren $\sum |nf(n)|$, $\sum |g(n)|$ und $\sum h(n)$, so genügt jede Lösung von (1) der Bedingung (VI): $\lim n^{-1}y(n)$ und $\lim \Delta y(n)$ existieren und sind gleich. — VII. Ist (2) $\Delta y(n) + g(n)y(n) = h(n)$ gegeben und konvergiert $\sum |g(n)|$ sowie $\sum h(n)$, so existiert $\lim y(n)$ für jede Lösung von (2); konvergieren $\sum |g(n)|$ und $\sum nh(n)$, so besitzt (2) unendlich viele Lösungen, für welche $\sum y(n)$ konvergiert und $\lim ny(n) = 0$ ist. — VIII. Konvergieren $\sum |nf(n)|$ und $\sum h(n)$, nicht aber $\sum g(n)$, ist ferner $g(n) \geq 0$ oder $g(n) \leq 0$ für schließlich alle n , so sind für jede Lösung von (1) mit $\lim \Delta y(n) = 0$ die Limiten von (VI) gleich Null, ebenso, wenn $\sum |g(n)|$, $\sum f(n)$ und $\sum h(n)$ konvergiert, nicht aber $\sum nf(n)$ und wenn schließlich $f(n) \geq 0$ oder $f(n) \leq 0$. — IX. Konvergiert $\sum |g(n)|$ und $\sum h(n)$, nicht aber $\sum f(n)$, ist ferner schließlich $f(n) \geq 0$ bzw. $f(n) \leq 0$, so folgt für jede Lösung von (1) aus der Existenz von $\lim y(n)$ das Verschwinden dieses Limes.

Haupt (Erlangen).

Malmquist, J.: Sur les points singuliers des équations différentielles. Ark. Mat. Astron. Fys. 29A, Nr 18, 1—11 (1943).

Die Note skizziert einige vorteilhafte Verbesserungen zu Hauptergebnissen der drei großen Arbeiten des Verf., „Sur l'étude analytique des solutions d'un système d'équations différentielles dans le voisinage d'un point singulier d'indétermination“ in Acta math. 73—74 (vgl. dies. Zbl. 25, 327—329). Für den Fall mehrfacher Wurzeln s_1, \dots, s_n der charakteristischen Gleichung war dort erst im Falle eines linearen Systems eine formale Reduktion auf eine Normalgestalt des Systems gegeben, wo die Koeffizientenmatrix in mehrere quadratische Kästchen um die Diagonale zerfällt, deren Größe den Vielfachheiten der s , entspricht; in ähnlicher Art waren umgekehrt Lösungen aufgebaut. Die Rechentchnik kann dabei etwas günstiger gestaltet werden; der Fall einfacher Wurzeln wird auf neue Art als ausgezeichnet hervorgehoben. Die analytische Durchführung ist auf gewisse Sektoren beschränkt, die übergreifen, so daß analytische Fortsetzung grundsätzlich möglich ist (aber wie bekanntlich immer, so entziehen sich auch hier die nötigen Koeffizienten den erwünschten einfachen algebraischen Rechenverfahren); die Koeffizienten, welche die Systemfunktionen vor und nach der Reduktion verknüpfen, sind asymptotisch zu den Koeffizienten der formalen Reduktion. — Zwei Sätze ähnlicher Struktur können auch für nicht lineare Systeme formuliert werden.

Ullrich (Gießen).

Malmquist, J.: Sur un système d'équations différentielles étudié par M. Störmer. Ark. Mat. Astron. Fys. 30 A, Nr 5, 1—8 (1944).

Il s'agit du système différentiel qui définit les trajectoires de corpuscules électriques dans le champ magnétique que crée un aimant élémentaire. C. Störmer avait été conduit à considérer comme très probable l'existence de trajectoires atteignant l'aimant. L'auteur prouve rigoureusement l'existence de telles trajectoires à l'aide de sa théorie des équations du type $x^{h+1} \frac{dy_i}{dx} = P_i(x, y_1, \dots, y_n)$, où $i = 1, 2, \dots, n$, où h est un entier positif et où les P_i sont des fonctions holomorphes au voisinage de l'origine et nulles en ce point (ce Zbl. 25, 327f.). J. Leray (Paris).

Rellich, Franz: Die zulässigen Randbedingungen bei den singulären Eigenwertproblemen der mathematischen Physik. (Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.) Math. Z. 49, 702—723 (1944).

Es handelt sich um Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung (λ reelle oder komplexe Zahl):

$$(1) \quad k(x)A(u) \equiv -(p(x)u')' + q(x)u = \lambda k(x)u, \quad l < x < L,$$

und zwar speziell um sog. singuläre (z. B. M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space. New York 1932; dies. Zbl. 5, 400). Dabei sollen $p(x)$, $p'(x)$ reell und stetig, $q(x)$, $k(x)$ reell und stückweise stetig sein, ferner $p(x) > 0$, $k(x) > 0$ und $u(x)$

komplexwertig, u, u' stetig, u'' stückweise stetig sein für $0 < x \leq L$; es ist somit (was keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit darstellt) das Problem in $x = L$ regulär, so daß in $x = L$ eine Randbedingung $u(L) \cos \beta + u'(L) \sin \beta = 0$, $0 \leq \beta < \pi$, vorzuschreiben ist, während das Problem in $x = 0$ singulär sei. Wenn nun die Randwertaufgabe auf die Spektralzerlegung eines Operators im Hilbertschen

Raum mit dem Skalarprodukt $(u, v) = \int_0^L k(x) u(x) \overline{v(x)} dx$ hinauslaufen soll, so

müssen nach Weyl [Math. Ann. 68, 220–269 (1910)] jedenfalls für die Eigenfunktionen u die Bedingungen (B_1) : $(u, u) < +\infty$, $(A(u), A(u)) < +\infty$ erfüllt sein; und es sind dann in $x = 0$ nur die beiden folgenden, einander ausschließenden Fälle möglich: Grenzpunktfall: Es gibt (mindestens) ein (reelles oder komplexes) λ , für welches

(1) eine Lösung u mit $\int_0^{x_0} k |u|^2 dx = +\infty$ besitzt ($0 < x_0 < L$); oder Grenzkreisfall:

Es gibt (mindestens) ein λ , so daß für alle Lösungen u von (1) gilt: $\int_0^{x_0} k |u|^2 dx < +\infty$.

Im Grenzpunktfall ist die Randwertaufgabe (hinsichtlich $x = 0$) durch (B_1) allein bestimmt. Hingegen muß im Grenzkreisfall in $x = 0$ noch eine Randbedingung hinzutreten; alle derartigen Randbedingungen sind nun zwar bekannt (vgl. Stone, a. a. O.), aber im allgemeinen praktisch wenig brauchbar. Verf. geht nun von der Bemerkung aus, daß bei den singulären Eigenwertproblemen der mathematischen Physik im Grenzkreisfall die Differentialgleichung (1) in der Regel (in $x = 0$) eine Stelle der Bestimmtheit besitzt. Unter dieser Annahme, daß nämlich in $x = 0$ gleichzeitig Bestimmtheitsstelle und Grenzkreisfall vorliegt, beweist Verf. den folgenden Satz: Es besitzt (1) ein vollständiges, orthogonales, normiertes System von Eigenfunktionen, welche folgenden Randbedingungen genügen: Sind α, β feste Zahlen mit $0 \leq \alpha < \pi$, $0 \leq \beta < \pi$, so ist $u(L) \cos \beta + u'(L) \sin \beta = 0$ die Randbedingung in $x = L$. Ist ferner $\omega(x) = x^{\alpha_1} (1 + \omega_1 x + \dots)$, $\psi(x) = x^{\alpha_2} (\psi_0 + \psi_1 x + \dots) + c\omega(x) \log x$ dasjenige Fundamentalsystem von (1) (in der Umgebung von $x = 0$), für welches die charakteristischen Exponenten ρ_1, ρ_2 so nummeriert sind, daß $\Re(\rho_1) > \Re(\rho_2)$ oder $\Re(\rho_1) = \Re(\rho_2)$, $\Im(\rho_1) \geq \Im(\rho_2)$ (\Re bzw. \Im bezeichnen den Real- bzw. Imaginärteil), für welches ferner $\psi_0 = 1, c = 0$, wenn $\rho_1 - \rho_2$ nicht ganzzahlig bzw. $\psi_0 = 0, c_1 = 1$, wenn $\rho_1 - \rho_2 = 0$ bzw. $\psi_0 = 1, \psi_n = 0$, wenn $\rho_1 - \rho_2 = n > 0$ ganz, und wird $u(x) = u_0 \psi(x) + u_1 \omega(x)$ gesetzt, so lautet die Randbedingung für $x = 0$ so: $u_0 \cos \alpha + u_1 \sin \alpha = 0$ bzw. $u_0 e^{i\alpha} + u_1 e^{-i\alpha} = 0$ je nachdem ρ_1, ρ_2 reell sind oder nicht. Die zugehörigen Eigenwerte besitzen keinen Häufungspunkt im Endlichen. — Als Anwendung werden die kreisförmige Membran mit festgehaltenem Rande sowie die Wellengleichung des Kepler-Problems behandelt und die dabei auftretenden Randbedingungen physikalisch gedeutet.

Haupt (Erlangen).

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Schouten, J. A., und W. van der Kulk: Beitrag zur Theorie der Systeme Pfaffscher Gleichungen. 11. Versl. Nederl. Akad. Wetensch. 52, 646–652 u. dtsh. Zusammenfassung 652–653 (1943) [Holländisch].

Démonstration du théorème qu'une \mathcal{M}_{2n-m} de vecteurs peut être transformée dans une autre \mathcal{M}_{2n-m} de vecteurs par une transformation de contact homogène quand les deux \mathcal{M}_{2n-m} ont la même classe et le même index et dans ce cas seulement. De ce théorème les formes canoniques des \mathcal{M}_{2n-m} de vecteurs, publiées dans IX. (ce Zbl. 28, 359) sont déduites.

Autoreferat.

Kulk, W. van der: Beitrag zur Theorie der \mathfrak{S}_d^m -Felder. 4. Versl. Nederl. Akad. Wetensch. 62, 575–583 u. dtsh. Zusammenfassung 583 (1943) [Holländisch].

Eine d -dimensionale Mannigfaltigkeit von linearen m -dimensionalen Raumelementen E_m in einem Punkt ξ^x einer \mathfrak{S}_d^m heißt eine \mathfrak{S}_d^m . Ordnet man jedem Punkt ξ^x der X_n eine \mathfrak{S}_d^m zu, so entsteht ein \mathfrak{S}_d^m -Feld [vgl. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.

44, 452—463, 625—635 (1941); 45, 26—31 (1942); dies. Zbl. 25, 53, 178 26, 224 zitiert als § I, II, III]. Man kann ein solches Feld entweder als Nullstellenmannigfaltigkeit eines Systems

$$v^{[\kappa_1 \dots \kappa_m} v^{\nu_1] \dots \nu_m} = 0; \kappa_1, \dots, \kappa_m, \nu_1, \dots, \nu_m = 1, \dots, n$$

$$F(\xi^\kappa, v^{\kappa_1} \dots \kappa_m) = 0; a = \lambda + 1, \dots, m(n - m)$$

auffassen (vgl. § I, II, III), oder man kann es festlegen durch Gleichungen in Parameterform

$$\begin{aligned} B_b^\kappa &= B_b^\kappa(\xi^r, \eta^k), \quad \kappa, \lambda, \nu = 1, \dots, n; \quad k = \bar{1}, \dots, \bar{d}, \\ C_\lambda^x &= C_\lambda^x(\xi^\nu, \eta^k), \quad b = 1, \dots, m; \quad x = m + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Die letzte Methode, die hier angewandt wird, ermöglicht es, dem \mathfrak{E}_d^m -Feld eindeutig ein E_{m+d} -Feld in einer X_{n+d} zuzuordnen. Jede geometrische Eigenschaft des \mathfrak{E}_d^m -Feldes wird dadurch auch eine solche für das E_{m+d} -Feld. Der vollständigen Integrabilität des \mathfrak{E}_d^m -Feldes entspricht z. B. die Eigenschaft, daß es durch jeden Punkt der X_{n+d} mindestens eine Integral- X_m von bestimmter Art des E_{m+d} -Feldes gibt. Infolgedessen kann man die drei in § I, S. 456, § III, S. 29, 30 aufgestellten Sätze für die vollständige Integrabilität des \mathfrak{E}_d^m -Feldes beweisen durch Anwendung der Cartanschen Integrabilitätstheorie auf das E_{m+d} -Feld. Hier wird der dritte Satz (§ III, S. 30), welcher eine Verallgemeinerung eines Jacobischen Satzes über partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung ist, bewiesen. *Autoreferat.*

Wittich, H.: Ganze Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. Math. Z. 49, 579—582 (1944).

Für die Differentialgleichung $\Delta u = e^u$ gibt es keine für alle endlichen x, y konvergente Potenzreihe in x, y als Lösung. Darüber hinaus zeigt hier der Verf.: ist $f(u)$ zweimal stetig diffenzierbar und positiv konvex für alle u und wächst $f(u)$ so rasch,

daß das Integral $\int_0^\infty \frac{dx}{\left(\int_0^x f(u) du\right)^{\frac{1}{2}}}$ konvergiert, so gibt es keine Lösung $u(x, y)$ der Differentialgleichung $\Delta u = f(u)$, die überall zweimal stetig differenzierbar ist.

H. Hornich (Wien).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Neumann, J. von, I. J. Schoenberg: Fourier integrals and metric geometry. Trans. Amer. Math. Soc. 50, 226—251 (1941).

Unter einer Schraubenlinie eines metrischen Raumes \mathfrak{R} — mit den Punkten x und der Distanz $d(x, x')$ — verstehen Verff. eine stetige Kurve $x = x_t$ ($-\infty < t < \infty$) mit der Eigenschaft, daß $d(x_t, x_s) = F(|t - s|)$ eine Funktion von $t - s$ allein ist; die zugehörige Funktion $F(t)$ wird Schraubenfunktion genannt. — Es ist bemerkenswert, daß in dieser Definition im Gegensatz zur üblichen von einer erzeugenden einparametrischen Gruppe von Isometrien von \mathfrak{R} nicht die Rede ist. Die Definition der Verff. erweist sich im Euklidischen E_n und Hilbertschen Raum \mathfrak{H} mit der üblichen, naheliegenden Definition gleichbedeutend. — Die Verff. stellen und beantworten in dieser Arbeit die Frage: Welchen Bedingungen muß eine Funktion $F(t)$ genügen, damit sie Schraubenfunktion (einer geeigneten Schraubenlinie) des Raumes $\mathfrak{R} = \mathfrak{H}$ ist? Diese Frage ist leichter zu beantworten als die Frage nach den Schraubenlinien selbst. Eine notwendige und hinreichende Bedingung ist die, daß

$$F^2(t) = \int_0^\infty \frac{\sin^2 t u}{u^2} d\gamma(u)$$

ist, wo $\gamma(u)$ für $u \geq 0$ nirgends abnimmt, $\gamma(0) = 0$, und $\int_1^\infty u^{-2} d\gamma(u)$ endlich ist. — $F(t)$ ist dann und nur dann Schraubenfunktion eines E_n , wenn $\gamma(u)$ Treppenfunktion

mit nur endlich vielen Sprungstellen ist. Das niedrigste n in E_n wird bestimmt. — Die Schraubenfunktion (und damit die zugehörige Schraubenlinie) ist dann und nur dann beschränkt, wenn $\gamma(0) = \gamma(+0)$ ist und

$$\int_{+0}^{\infty} u^{-2} d\gamma(u)$$

existiert. Es wird bewiesen, daß die Schraubenlinie in diesem Fall auf eine Hyperkugel von \mathfrak{H} gelegt werden kann. — Eine Schraubenlinie in \mathfrak{H} ist dann und nur dann rektifizierbar, wenn $\gamma(u)$ beschränkt ist. — Eine Schraubenlinie in \mathfrak{H} ist dann und nur dann eine geschlossene Kurve, wenn $\gamma(u)$ eine Treppenfunktion ist, deren Sprungstellen $u_r = ru_1$ sind, $u_1 > 0$, $r = 1, 2, \dots$. — Die Hauptfrage kann auch so gefaßt werden: Wie muß die Funktion $F(t)$, $t > 0$, beschaffen sein, damit die nicht mit der üblichen Metrik $|t - s|$, sondern mit der Metrik $F(|t - s|)$ versehene Gerade (E_1) isometrisch in \mathfrak{H} eingebettet werden kann? Verff. beantworten die allgemeinere Frage: Wie muß $F(t)$ beschaffen sein, damit der mit der Metrik $F(|t - s|)$ versehene $E_k(t, s)$ sind Punkte von E_k , $|t - s|$ die Euklidische Distanz) isometrisch in \mathfrak{H} einbettbar ist? Notwendig und hinreichend ist, daß

$$F^2(t) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \Omega_k(tu)}{u^2} d\gamma(u)$$

ist, wo $\gamma(u)$ für $u \geq 0$ nirgends abnimmt, $\gamma(0) = 0$, und $\int_1^{\infty} u^{-2} d\gamma(u)$ existiert; $\Omega_k(z)$ ist eine wohlbestimmte ganze Funktion.
E. Hopf (München).

Marrot, Raymond: Extension d'un théorème de Perron. C. R. Acad. Sci., Paris 217, 165—167 (1943).

Extension aux opérateurs complètement continus de l'espace de Hilbert du théorème suivant, dû à O. Perron: si une matrice finie $A = (a_{ik})$ a tous ses éléments a_{ik} positifs, alors sa valeur propre de module maximum est réelle, simple, positive. Le réf. remarque que des résultats encore plus généraux étaient obtenus auparavant par A. Rutman (voir ce Zbl. 23, 330), relatifs à des espaces de Banach quelconques.

Béla de Sz. Nagy (Szeged).

Zaanen, A. C.: Über vollstetige symmetrische und symmetrisierbare Operatoren. Nieuw Arch. Wiskde. N. s. 22, 57—80 (1943).

Die lineare Transformation A eines — mit innerem Produkt versehenen, aber nicht notwendig separablen und vollständigen — Vektorraumes \mathfrak{H} heißt vollstetig, wenn sie jede beschränkte Teilmenge von \mathfrak{H} in eine kompakte überführt. Die Spektraltheorie der symmetrischen vollstetigen Transformationen wird hier neu entwickelt, und zwar nicht mit der Variationsmethode [F. Rellich, Math. Ann. 110, 342 bis 356 (1934); vgl. dies. Zbl. 10, 25], sondern mit Hilfe eines Iterationsverfahrens, das von O. D. Kellogg stammt [Math. Ann. 86, 14—17 (1922)]. Dasselbe Verfahren läßt sich auch in dem Falle mit Erfolg anwenden, daß die Transformation A nicht symmetrisch, sondern nur symmetrisierbar ist im folgenden Sinne: es gibt zu ihr eine positive beschränkte symmetrische Transformation H derart, daß HA symmetrisch und vollstetig ist. Anwendungen auf Integraloperatoren. Béla v. Sz. Nagy (Szeged).

Alaci, V.: La solution analytique d'un système fonctionnel. Bull. Sci. École polytechn. Timişoara 11, 174—178 (1944).

Die um 0 analytischen Lösungen der Funktionalgleichungen:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) - \psi(x)\psi(y); \quad \psi(x+y) = \varphi(x)\psi(y) + \varphi(y)\psi(x)$$

sind, abgesehen von der identisch verschwindenden, die folgenden:

$$\varphi(x) = e^{ax} \cos bx, \quad \psi(x) = e^{ax} \sin bx.$$

Hierfür gibt Verf. einen direkten Beweis durch Potenzreihenansatz.

Harald Geppert (Berlin).

Ghermanescu, Michel: Sur quelques équations fonctionnelles. Bull. Sci. École polytechn. Timișoara 11, 181—184 (1944).

Eine Funktion, die bei beliebigem m der Identität

$$f(m^{\alpha_1}x_1, m^{\alpha_2}x_2, \dots, m^{\alpha_n}x_n) = m^r f(x_1, x_2, \dots, x_n); \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$$

genügt, heiße pseudohomogen. Die vom Verf. schon früher (dies. Zbl. 28, 364) betrachtete Funktionalgleichung

$$(1) \quad m^r \cdot f(m x_1, m x_2, \dots, m x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + F(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (m > 0)$$

in der F eine homogene Funktion $(-r)$ -ten Grades der x_i ist, hat dann die allgemeine Lösung:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \{C x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}, \dots, x_n^{\alpha_n} + \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)\},$$

worin φ eine willkürliche, vom 0-ten Grade homogene Funktion der x_i ist und die α_i der Beziehung $\log m \cdot \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ genügen. Ähnlich, wenn in (1) $f(m^{\alpha_1}x_1, \dots, m^{\alpha_n}x_n)$ steht und F pseudohomogen vom Grade $-r$ ist.

Harald Geppert (Berlin).

Praktische Analysis:

● Schrutka, Lothar: Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenschiebers. 3., neubearb. Aufl. Wien: Deuticke 1943. XII, 101 S. RM. 4.—.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen

Statistik:

Nolli, P.: Die Darstellung stochastischer Vorgänge mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie. (122. Jahresvers., Sitten, Sitzg. v. 29.—31. VIII. 1942.) Verh. Schweiz. naturforsch. Ges. 1942, 77.

Verf. möchte die mit der üblichen Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik verbundenen Schwierigkeiten dadurch umgehen, daß er „jedem mutmaßlichen Ereignis zu einem bestimmten Zeitpunkt eine bestimmte Eintrittswahrscheinlichkeit zuordnet. Durch einen Grenzübergang, mittels dessen die Wahrscheinlichkeitsdichten eingeführt werden, erhält man unter Wahrung der allgemeinen Verknüpfungsregeln je nach der Problemstellung allgemeine mathematische Ausdrücke, die die Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeiten für beliebig geartete statistische Gesamtheiten zu ermitteln gestatten“. Keine Ausführungen.

Harald Geppert.

● Fisher, Ronald A., and Frank Yates: Statistical tables for biological, agricultural and medical research. 2. edit. London and Edinburgh: Oliver a. Boyd 1943. sh 13/6.

Dodge, H. F., and H. G. Romig: Single sampling and double sampling inspection tables. Bell Syst. techn. J. 20, 1—61 (1941).

Die Abhandlung stellt das Ergebnis langjähriger Erfahrungen in der Kontrolle von Massenprodukten dar. Es haben sich allmählich Verfahren herausgebildet, die einen bestmöglichen Ausgleich herstellen zwischen dem Wunsch der Verbraucher, eine Ware gleichbleibender Qualität zu erhalten und dem Bestreben der Hersteller, die Kosten für die Prüfungen der Endprodukte möglichst zu senken. Grundsätzlich unterscheiden die Verf. bei der Prüfung einer Partie von Massenprodukten eine einfache und eine doppelte Auslese. Sie gehen folgendermaßen vor: I. Einfache Auslese: a) Prüfung einer Stichprobe von n Stücken. b) Wenn die Zahl der fehlerhaften Stücke in dieser Stichprobe c nicht übersteigt, Annahme der gesamten angebotenen Partie. c) Anderenfalls Prüfung aller Stücke der Partie und Ersatz für die insgesamt gefundenen fehlerhaften Stücke. — II. Doppelte Auslese: a) Prüfung einer ersten Stichprobe von n_1 Stücken. b) Wenn die Zahl der fehlerhaften Stücke in dieser ersten Stichprobe c_1 nicht übersteigt, Annahme der gesamten angebotenen Partie. c) Wenn die Zahl der

fehlerhaften Stücke in der ersten Stichprobe c_2 übersteigt, Prüfung aller Stücke der Partie. d) Wenn die Zahl der fehlerhaften Stücke in der ersten Stichprobe zwar c_1 , aber nicht c_2 überschreitet, Prüfung einer zweiten Stichprobe von n_2 Stücken. e) Wenn die Zahl der fehlerhaften Stücke in beiden Stichproben zusammen c_2 nicht übersteigt, Annahme der Partie. f) Anderenfalls Prüfung aller Stücke der Partie und Ersatz für die insgesamt gefundenen fehlerhaften Stücke. — In Abhängigkeit von der Stückzahl N der Partie werden für verschiedene Qualitätsansprüche die Umfänge n_1 und n_2 der Stichproben so gewählt, daß die nach a) und c) bzw. nach a), c), d) und f) insgesamt zu prüfende Stückzahl ein Minimum wird. Das Risiko des Abnehmers definieren die Verff. auf zwei verschiedene Arten. Für jede dieser beiden Fälle tabulieren sie für verschiedene Qualitätsansprüche die nach der Extremalbedingung zusammengehörenden Werte der Konstanten für die einfache und für die doppelte Auslese. Diese Tafeln sind geeignet, in einem Werk, in dem Massenwaren hergestellt werden, bei den Kontrollen Arbeitskräfte, Zeit und Kosten einzusparen. Allerdings wird dabei vorausgesetzt, daß es sich bei den Kontrollen nicht um zerstörende Eingriffe handelt.

v. Schelling (Berlin).

Ferrieu, François: Étude sur les mesures liées des grandeurs; problème des moyennes. Rev. Scient., Paris 81, 203—216 (1943).

Verf. legt sich die Frage vor: „Wie kann man erkennen, ob die nach der Ausgleichung verbleibenden Restfehler für einzelne Bedingungsgleichungen überzufällig groß sind, so daß die Ausscheidung dieser Gleichungen oder die Einführung eines oder mehrerer neuer Parameter notwendig wird?“ Man wird das Problem nicht als neu bezeichnen können. Ohne auch nur ein Werk über Ausgleichsrechnung zu zitieren, bemüht sich Verf. unter großem Aufwand aus der Mengenlehre und mit einer Fülle eigens geschaffener Begriffe um eine Lösung der Aufgabe. Mir scheint, schon Gauß hat uns mit den zu den einzelnen Unbekannten gehörenden mittleren Fehlern alle Hilfsmittel gegeben, die man zur Beantwortung der gestellten Frage braucht. Die Vorzüge des vom Verf. entwickelten, wenig durchsichtigen und sehr umständlichen Verfahrens vermag ich nicht zu erkennen.

v. Schelling (Berlin).

Vernotte, Pierre: Détermination, par la condition de moindre imprécision, d'une formule dépendant linéairement de paramètres, destinée à la représentation d'une courbe expérimentale. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 33—35 (1943).

Eine lineare Funktion $y = Ax + B$ sei experimentell gegeben durch Ordinaten y_1 bis y_{2N+1} in den $(2N+1)$ ganzzahligen Abszissen von $-N$ bis $+N$. Die Koeffizienten A und B werden angesetzt in der Form

$$A = a_1(y_1 - y_{2N+1}) + a_2(y_2 - y_{2N}) + \cdots + a_N(y_N + y_{N+2}),$$

$$B = b_1(y_1 + y_{2N+1}) + b_2(y_2 + y_{2N}) + \cdots + b_N(y_N + y_{N+2}) + b_{N+1}y_{N+1}.$$

Der Ausdruck $(Ax + B)$ nimmt also die Gestalt an $\Sigma(ax + b)y$. Die vom Verf. formulierte Bedingung der kleinsten Ungenauigkeit besagt, daß der größte Absolutwert eines Koeffizienten $(ax + b)$ möglichst klein sein soll. Für $(2N+1) = 3$ ergibt sich z. B. die Lösung für $(Ax + B)$ in der Form $6y = 3(y_3 - y_1)x + (y_1 + y_3 + 4y_2)$, für $(2N+1) = 5$ wird $14y = [3(y_5 - y_1) + (y_4 - y_2)]x + 2[2(y_4 + y_2) + 3y_3]$. Auch für den Fall einer geraden Anzahl von Ordinaten werden die Lösungen gegeben, ausgerechnet für 2 bis 12 gegebene Ordinaten. Bei Funktionen höheren Grades als 1 wird das Problem allgemein unlösbar.

J. Bartels (Potsdam).

Vernotte, Pierre: Représentation d'une courbe expérimentale, dans le cas général, par la condition de moindre imprécision. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 148—150 (1943).

Das im vorstehenden Referat behandelte Problem wird für den allgemeinen Fall behandelt, z. B. einer theoretischen Kurve mit 3 Parametern $y = f(x, A, B, C)$. Durch Einführung von Näherungswerten A_0, B_0, C_0 werden die Gleichungen linearisiert. Die praktische Rechnung muß stilisiert werden, was am Beispiel $y = C + Bg(Ax)$ gezeigt wird.

J. Bartels (Potsdam).

Løvestad, Ludvig: Eine Eigenschaft von Maßstäben. Norsk mat. Tidsskr. **26**, 9 bis 13 (1944) [Norwegisch].

Für eine in einer Matrix angeordnete Gesamtheit von Beobachtungsergebnissen $\{x_{pq}\}$ sei das Bestehen einer Klasse von Relationen $x_{pq} = f(x_{pr}, x_{qr}, a_{qr}) = f(x_{ps}, x_{qs}, a_{qs})$ vorausgesetzt, so daß also x_{pq} für beliebige p und q bei bekannten Größen x_{pr} und x_{qr} und gegebenem Parameter a_{qr} berechnet werden kann. Außer der naheliegenden Funktionalgleichung $f(x_{ps}, x_{qs}, a_{qs}) = f[f(x_{ps}, x_{rs}, a_{rs}), f(x_{qs}, x_{rs}, a_{rs}), a_{qr}]$ werden durch Spezialisierung noch einige weitere Beziehungen angegeben. Nimmt man insbesondere für $f(x_{pr}, x_{qr}, a_{qr})$ die Form $f \equiv B_{qr}A(x_{pr} - x_{qr}) = x_{pq}$ an, wo $A(u)$ eine noch zu bestimmende Funktion bedeutet, so folgt aus der Funktionalgleichung für $A(u)$, die sich in der Form $A[B_{rs}\{A(u+v) - A(v)\}]B_{qr} = A(u) \cdot B_{qs}$, $u = x_{ps} - x_{qs}$, $v = x_{qs} - x_{rs}$, schreiben läßt, daß $A(u)$ eine lineare Funktion und daß für die Parameter B_{qr} die Relation $B_{qr} = B_{qs} \cdot B_{ss}/B_{rs}$ erfüllt sein muß. Setzt man $x_{pq} = p - q$, so gelangt man zu der Beziehung $(x_{pt} - x_{qt}) : (x_{rt} - x_{st}) = (p - q) : (r - s)$.
F. Knoll (Wien).

Geometrie

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Hjelmlev, Johannes: Konstruktionen mit normiertem Lineal. Mat. Tidsskr. B **1943**, 21—26 [Dänisch].

Ein normiertes Lineal ist eines mit zwei auf ihm fest angebrachten Marken A, B . Sind mit ihm die Operationen erlaubt: 1. eine Gerade durch zwei vorgelegte Punkte zu ziehen, 2. die Strecke AB auf einem Halbstrahl von seinem Endpunkt aus abzutragen, 3. die Strecke AB so einzupassen, daß A auf einen gegebenen Punkt, B auf eine gegebene Gerade fallen, so lassen sich, wie Verf. zeigt, auch ohne Voraussetzung des Parallelenaxioms sämtliche mit Zirkel und Lineal möglichen Konstruktionen ausführen. Die entsprechenden Grundaufgaben werden vom Verf. in extenso gelöst. Alle Konstruktionen werden also zugleich in der euklidischen und nichteuklidischen Ebene ausführbar, auch in der sphärischen, wenn das Normalmaß AB von einem Quadranten verschieden ist. Erlaubt man in der euklidischen Ebene schließlich noch die Operation, 4. das normierte Lineal so einzupassen, daß die Marken A, B auf vorgegebene sich schneidende Geraden fallen und das Lineal gleichzeitig durch einen gegebenen Punkt läuft, so lassen sich mit diesem Instrument bekanntlich alle Aufgaben 3. und 4. Grades lösen.

Harald Geppert (Berlin).

Elementargeometrie:

Pajares Diaz, Emilio: Anwendungen einer geometrischen Konstruktion. Euclides **4**, 315—318 (1944) [Spanisch].

Die nichtparallelen Seiten eines Trapezes schneiden auf der Parallelen durch den Diagonalschnittpunkt zu den Grundseiten eine Strecke aus, die gleich dem harmonischen Mittel zwischen den Grundseiten ist. Verf. zeigt, wie man diesen Satz anwenden kann, um zu beliebig vielen parallel geschalteten elektrischen Widerständen den reduzierten Widerstand graphisch zu ermitteln. Ferner führt er mehrere geometrische Anwendungen an: 1. Zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen zu finden. 2. In ein gegebenes Dreieck ein Quadrat zu beschreiben. 3. Aus drei der vier Ankreishalbmesser eines Dreiecks den vierten zu konstruieren. 4. Aus drei der vier Größen: Inkreishalbmesser und Höhen des Dreiecks die vierte zu konstruieren. 5. Geometrisch-anschaulicher Beweis, daß das harmonische Mittel zweier positiven Größen kleiner als das geometrische Mittel und dieses kleiner als das arithmetische Mittel ist.

M. Zacharias (Berlin).

Kreul, H.: Das Fadenstabproblem. Planimetrische Beziehungen zwischen Faden- und Papierstreifenkonstruktionen der Ellipse. Math. u. Naturwiss. Unterr. H. 2, 37—42 (1944).

Es wird ohne analytische Hilfsmittel, auf rein planimetrischem Wege bewiesen, daß die sog. Fadenkonstruktion und die Papierstreifenkonstruktion der Ellipse zum selben Resultat führen. *Klingst (Wien).*

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Hacar, Miguel A.: Koordinaten der bedeutsamen Punkte in der Ebene eines Dreiecks. Euclides 4, 329—332 (1944) [Spanisch].

Verf. leitet die Dreieckskoordinaten der merkwürdigen Punkte P des Bezugsdreiecks $A_1A_2A_3$ elementar aus der Tatsache ab, daß sie proportional den Inhalten der Dreiecksflächen PA_iA_k sind. *Harald Geppert (Berlin).*

Edge, W. L.: Notes on a net of quadric surfaces. 5. The pentahedral net. Proc. London Math. Soc., II. s. 47, 455—480 (1942).

Für die vorangehenden Mitteilungen vgl. dies. Zbl. 17, 184, 322; 19, 229; 27, 241. — Obwohl eine nichtausgeartete Fläche 2. Grades ∞^{10} Polarpendaeder besitzt — man versteht unter einem solchen bekanntlich ein vollständiges Fünfflach, dessen 10 Ecken und 10 Kanten paarweise konjugiert sind — braucht ein Bündel von Flächen 2. Ordnung kein gemeinsames Polarpendaeder aufzuweisen. Schon Reye hat gezeigt, daß dies an eine Bedingung geknüpft ist, deren Erfüllung jedoch gleich ∞^1 Polarpendaeder nach sich zieht, die einer Torse 3. Klasse Γ^4 umschrieben sind. Auf dieses besondere Bündel stößt man z. B., wenn man bezüglich einer Fläche 3. Ordnung die Polarquadriken der Punkte einer Ebene aufsucht. — Verf. unternimmt nun das Studium des „Pendaeder-Bündels“ \mathfrak{P} ausgehend von der Torse Γ^4 in der genormten Darstellung $x_0 + tx_1 + t^2x_2 + t^3x_3 = 0$ und der von den Pendaederflächen auf ihr gebildeten Ebeneninvolution 5. Ordnung I_5 , bzw. der hierzu gleichwertigen Punktinvolution auf der kubischen Rückkehrkante c^3 . Der Ort der Pendaederecken ist identisch mit der Jacobischen Sextik c^6 (dem Spitzenort der Bündelkegel), und die Gesamtheit der Pendaederkanten erfüllt deren Trisekantenfläche Θ^8 . Die Erzeugenden von Θ^8 sind Achsen von c^3 , also Doppeltangenten von Γ^4 , die Erzeugenden von Γ^4 wiederum sind vierfache Tangenten von Θ^8 ; außer ihrer Berührungskurve haben beide Flächen noch 8 Erzeugende gemein, die zu den Doppelementen von I_5 gehören. Eine eindeutige Beziehung zwischen den Achsen von c^3 und den Bündelflächen wird wieder aufgefunden. Ferner werden die Gleichungen von gewissen kovarianten Flächen 4. Ordnung angegeben, u. a. für den Eckenort jener ∞^2 der Torse Γ^4 umschriebenen Sechseckfläche, die c^3 in den Punkten einer Bündelfläche treffen, und für den Ort aller Punkte, die zusammen mit ihrem bezüglich \mathfrak{P} konjugierten Punkt auf einem Strahl des zu c^3 gehörigen Gewindes liegen. — Im 2. Teil der Arbeit werden einige Ergebnisse, die in den vorangegangenen Noten 3 und 4 für das allgemeine Bündel erhalten wurden, auf das Pendaederbündel spezialisiert. Insbesondere wird auf die Stellung von Θ^8 im Rahmen der Abbildung des Strahlraumes auf die Plücker'sche Hyperquadrik Q_4^2 des R_5 eingegangen. — Im 3. Abschnitt wird schließlich jenes besondere Pendaederbündel \mathfrak{P}^* näher betrachtet, welches dadurch ausgezeichnet ist, daß die Involution I_5 zwei vollständig ausgeartete Quintupel enthält, also zwei fünffach zählende Punkte A, B auf c^3 . In A und B sind dann je 4 Grundpunkte des Bündels zusammengedrückt. Die Jacobische Kurve c^6 zerfällt in zwei räumliche Kubiken, die c^3 in A und B berühren und hier auch die Schmiegebenen gemein haben. Θ^8 zerfällt in zwei Regelflächen 4. Grades, ebenso das Hüllgebilde der beiden in \mathfrak{P}^* enthaltenen Kegelscharen. *W. Wunderlich.*

Haenzel, G., und F. Reutter: Die Geometrie der linearen Strahlenkongruenz. 4. Über algebraische Regelflächen vom Grade $2n$ mit zwei n -fachen Leitgeraden ($n = 3, 4, 5, 6$). J. reine angew. Math. 185, 78—101 (1943).

Die Arbeit schließt sich unmittelbar an eine Reihe früherer Arbeiten von Haenzel

und Reutter (dies. Zbl. 11, 321; 14, 173; 18, 231; 21, 247) an, deren Ergebnisse hier vielfach benützt und teilweise vervollständigt werden. Im besonderen werden in dieser Arbeit Büschel von Regelflächen 6., 8., 10. und 12. Grades mit zwei (reellen oder konjugiert komplexen) windschiefen Leitgeraden untersucht, deren Regelscharen in der (hyperbolischen oder elliptischen) linearen Kongruenz liegen. Die Möglichkeit der Untersuchung bildet die Abbildung der elliptischen und hyperbolischen Kongruenz auf die komplexe oder die dualkomplexe Ebene. — Der Abschnitt I beschäftigt sich mit Büscheln zirkularer Kurven höherer Ordnung (Kurven 5. Ordnung in 2a, Kurven 6. Ordnung in 2a; Kurven 8. und 9. Ordnung in 5a, Kurven 10. und 12. Ordnung in 5b), woran sich Untersuchungen zirkularer Kurven der pseudo-euklidischen Ebene im Teilabschnitt B von I. schließen. Diese bisher unbekannten zirkularen Kurven können nämlich als Bilder algebraischer Regelflächen 6., 8., 10. und 12. Grades mit zwei konjugiert-imaginären Leitgeraden angesehen werden. Demnach bezieht sich der II. Teilabschnitt der Arbeit auf die Untersuchung der konjugierten Büschel von Regelflächen der genannten Gradzahlen in der linearen Kongruenz. Die Gleichungen der Flächenbüschel werden im einzelnen angegeben und aus ihnen die Haupteigenschaften dieser komplizierten Flächengebilde gewonnen. *Steck (München).*

Bottema, O.: Die Figur von vier Ebenen im R_5 . 1. Versl. Nederl. Akad. Wetensch. 53, 30—37 (1944).

Der Verf. zeigt zuerst, wie man leicht die Invarianten von vier windschiefen R_m in einem R_{2m+1} angeben kann. Sodann untersucht er den Fall $m = 2$. Es zeigt sich, daß die untersuchte Figur nicht immer durch ihre Invarianten vollständig charakterisiert werden kann. Um die Sonderfälle anzugeben, bedient sich der Verf. der Elementarteilertheorie und findet sechs verschiedene Typen, die er untersucht und beschreibt. (Als Beispiel zitieren wir einen der Sonderfälle: Die vier Ebenen haben drei verschiedene Transversalen.) Wegen Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

Hlavatý (Prag).

Bottema, O.: Die Figur von vier Ebenen im R_5 . 2. Versl. Nederl. Akad. Wetensch. 53, 53—57 u. dtsch. Zusammenfassung 57 (1944).

Der Verf. wendet in diesem zweiten Teil die im ersten Teil (vgl. vorsteh. Referat) entwickelte Theorie auf zwei Spezialfälle an: 1. Die Figur von vier Oskulationsebenen einer Kurve fünften Grades im R_5 . 2. Die Figur von zwei in bezug auf $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 0$ konjugierte Ebenenpaare.

Hlavatý (Prag).

Algebraische Geometrie:

• **Wieleitner, H.:** Algebraische Kurven. Unveränderter Neudruck. 2. Tl. Allgemeine Eigenschaften. (Samml. Göschen Bd. 436.) Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1943. 122 S. u. 35 Fig. geb. RM. 1.62.

I. Schnittpunkt zweier Kurven (Abzählendes, Einfluß von Singularitäten, Problemkreis des Cramerschen Paradoxons). II. Polareigenschaften (mit Einschluß von metrischen Beziehungen und Durchmessern). III. Die Plückerschen Formeln. IV. Die Hessesche, Steinersche und Cayleysche Kurve. Verhalten in den Singularitäten. V. Rationale Kurven. (Begriff des Geschlechts, Abbildung zweier Kurven aufeinander.) VI. Birationale Transformationen. (Nur Cremona-Transformationen, vor allem quadratische. Die zirkulare Inversion.) VII. Kurven 3. Ordnung. (Die Konfigurationen der Wendepunkte und der harmonischen Polaren.) VIII. Kurven 4. Ordnung. (Die Konfigurationen der Doppeltangenten.) Nicht behandelt wird z. B. der Fragenkreis des Noetherschen Satzes, die Geometrie auf der Kurve. Verf. legt Wert auf abzählende Aussagen, untersucht überall den Einfluß von Doppelpunkten und Spitzen sowie Realitätsfragen. Reichliche und gut gewählte Beispiele erleichtern das Verständnis. Wo sich der Verf. wegen der Enge des Raumes mit den einfachsten Fällen begnügen muß, verweist er wegen der Weiterführung auf die Literatur. *Ott-Heinrich Keller (Berlin).*

Apéry, Roger: *La géométrie algébrique*. Bull. Soc. Math. France **71**, 46—60 (1943).

Lesenswerter Überblick über Ziele, Wege und Ergebnisse der geometrischen und transzendenten Methoden der algebraischen Geometrie der Kurven, Flächen und höheren Mannigfaltigkeiten etwa nach dem Stande von 1930 vor Severis Einführung der Äquivalenzscharen. Keine neuen Tatsachen oder Perspektiven. *Harald Geppert*.

Perron, Oskar: Studien über den Vielfachheitsbegriff und den Bézoutschen Satz. Math. Z. **49**, 654—680 (1944).

Severi hat (vgl. dies. Zbl. **28**, 80) versucht, die Vielfachheiten der Lösungen von k Gleichungen mit k Unbekannten durch die Kroneckersche Elimination zu definieren. Perron zeigt hier, daß dieser Versuch mißglückt ist: schon im Fall isolierter Lösungen kann die Severische Definition einen viel zu hohen Wert im Vergleich zur Bezoutschen Multiplizität liefern. Auf Grund desselben Eliminationsverfahrens hat Severi auch eine Definition gegeben, wann ein Gleichungssystem eine irreduzible Kurve einfach gezählt vorstellt. Durch ein Beispiel des Ref. wird gezeigt, daß auch diese Definition mißglückt ist: es gibt Kurven, die sich in diesem Sinne überhaupt nicht einfach gezählt darstellen lassen. Severi hat noch eine zweite Vielfachheitsdefinition gegeben. Es wird gezeigt, daß diese mit der ersten nicht übereinstimmt, sondern daß sie im Fall isolierter Lösungen wirklich die richtige Bezoutsche Vielfachheit liefert; im Fall nicht isolierter Lösungen jedoch liefert sie in vielen Beispielen die Vielfachheit Eins, obwohl man nach der Vernunft und nach Severis eigener Absicht in allen diesen Fällen eine höhere Vielfachheit erwarten mußte. Zum Schluß wird eine algebraische Bedingung dafür angegeben, daß ein homogenes Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

van der Waerden (Leipzig).

Du Val, Patrick: The Jacobian algorithm and the multiplicity sequence of an algebraic branch. Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A **7**, 107—112 (1942).

Man kann den g.g.T. von mehr als zwei natürlichen Zahlen durch folgenden modifizierten Jacobischen Algorithmus bestimmen: Die kleinste Zahl wird von allen übrigen so oft abgezogen, als sie in der zweitkleinsten aufgeht. Die Reste und der Divisor bilden eine Zahlenreihe, mit der wieder ebenso verfahren wird, usw. Dieser Algorithmus wird auf die Bestimmung der Vielfachheiten der unendlich benachbarten Punkte eines Zweiges einer Raumkurve in n Dimensionen angewandt. *van der Waerden* (Leipzig).

Segre, B.: The postulation of a multiple curve. Proc. Cambridge Philos. Soc. **38**, 368—377 (1942).

Die Postulation θ_k einer irreduziblen nichtsingulären Kurve C der Ordnung c und des Geschlechts p für die Hyperflächen genügend hoher Ordnung n des S_{r+2} ($r \geq 1$), die C k -fach enthalten, ist von Todd (vgl. dies. Zbl. **23**, 371) mittels einer Methode der Entartung bestimmt worden; sie setzt voraus, daß man bereits weiß, daß θ_k lediglich von k, c, p, n, r abhängt, daß C durch eine Folge irreduzibler, nichtsingulärer Zwischenlagen in ein zusammenhängendes Polygon mit den gleichen Charakteren überführbar ist, und θ_k sich dabei nicht ändert. Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, gibt Verf. hier einen neuen, auf der Induktion nach k beruhenden Beweis der Formel

$$\theta_k = \binom{k+r}{k-1} cn - (r+3) \binom{k+r}{k-2} c - \left\{ \binom{k+r}{k-2} + \binom{k+r+1}{k-1} \right\} (p-1).$$

Er bedient sich eines weiteren, vom Verf. bewiesenen Satzes der abzählenden Geometrie. Es seien $0 = s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_{r-1} \leq s_r = s \leq k+1$ ganze Zahlen. Mit diesen bildet man ein Schema von $r, r-1$ und s ganzen positiven Zahlen:

$$\sigma = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_{r-1} & s_r \\ m_1 & m_2 & \dots & m_{r-1} & \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{s-1} & \mu_s \end{pmatrix};$$

darin ist die zweite bzw. dritte Zeile für $r=1$ bzw. $s=0$ wegzulassen. Die m_i, μ_i sind beliebig und so groß, daß es im S_{r+2} zwei Hyperflächensysteme $F_i = V_{r+1}^{m_i}$

($i = 1, 2, \dots, r-1$) und $\Phi_\lambda = V_{r+1}^{\mu_\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, \dots, s$) gibt, die einfach durch C gehen, ohne weitere Besonderheiten aufzuweisen. Zu jedem j zwischen 1 und $s > 0$ werde i durch $s_i < j \leq s_{i+1}$ erklärt und dann gesetzt: $\Gamma_0 = S_{r+2}$, $\Gamma_i = (F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_i)$, $\Delta_j = (\Gamma_i \cdot \Phi_j)$; es ist dann Γ_i eine nichtsinguläre, C enthaltende $(r+2-i)$ dimensionale, Δ_j eine ebensolche, auf Γ_i liegende $(r+1-i)$ dimensionale Mannigfaltigkeit. Der zweite Satz lautet dann: Die Anzahl $\Theta(\sigma)$ zusätzlicher unabhängiger Bedingungen, die den k -fach durch C gehenden V_{r+1}^n genügend hoher Ordnung n durch die Forderung der Berührung mit den s definierten Mannigfaltigkeiten Δ_j ($1 \leq j \leq s$) längs C auferlegt wird, ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \Theta(\sigma) = & \sum_{i=0}^{r-1} (\alpha_{i, s_{i+1}} - \alpha_{i, s_i}) c n + \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{i=j}^{r-1} (\beta_{i, s_{i+1}} - \beta_{i, s_i}) m_j c + \\
 (\star) \quad & + \sum_{j=1}^{r-1} \left\{ \gamma_{j-1, s_j} + \sum_{i=j}^{r-1} (\gamma_{i, s_{i+1}} - \gamma_{i, s_i}) \right\} \lambda_j c + \gamma_{r-1, s_r} \lambda_r c - \\
 & - \left\{ \sum_{i=0}^{r-1} (\alpha_{i, s_{i+1}} - \alpha_{i, s_i}) + 2 \sum_{i=0}^{r-1} (\beta_{i, s_{i+1}} - \beta_{i, s_i}) \right\} (p-1),
 \end{aligned}$$

wobei gesetzt ist

$$\begin{aligned}
 m_0 &= -(r+3), \quad \alpha_{i0} = \beta_{i0} = \gamma_{i0} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, r-1), \\
 \alpha_{ih} &= \sum_{\varrho=0}^{h-1} (-1)^\varrho \binom{h}{\varrho+1} \binom{k+r-i-\varrho-1}{k}, \quad \beta_{ih} = \sum_{\varrho=0}^{h-1} (-1)^\varrho \binom{h}{\varrho+1} \binom{k+r-i-\varrho-1}{k-1}, \\
 \gamma_{ih} &= \sum_{\varrho=0}^{h-1} (-1)^\varrho \binom{h-1}{\varrho} \binom{k+r-i-\varrho-1}{k-1}, \quad (i=0, 1, \dots, r-1; h=1, 2, \dots, k+1); \\
 \lambda_j &= \begin{cases} 0 & \text{für } s_{j-1} = s_j \\ \sum_{h=s_{j-1}+1}^{s_j} \mu_h^* & \text{,, } s_{j-1} < s_j \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, r).
 \end{aligned}$$

Für $r=1$ ist in der rechten Seite von (\star) das dritte Glied wegzulassen.

Harald Geppert (Berlin).

Apéry, Roger et Luc Gauthier: Extension des transformations birationnelles des courbes de l'espace ordinaire à l'espace ambiant. C. R. Acad. Sci., Paris **217**, 129—131 (1943).

Eine birationale Transformation zwischen zwei ebenen algebraischen Kurven C, C' kann im allgemeinen nicht zu einer birationalen Abbildung, d. h. Cremonaabbildung, der beiden einbettenden Ebenen erweitert werden, mit anderen Worten: für die ebene Cremona-Äquivalenz von C und C' ist die Gleichheit des Geschlechts und der Moduln wohl notwendig, aber nicht hinreichend. Anders liegt die Sache, wenn C, C' einem S_3 oder noch höheren Raum angehören; dann ist, wie Verf. zeigen, die Gleichheit von Geschlecht und Moduln die kennzeichnende Bedingung für die räumliche Cremona-Äquivalenz (mit \sim bezeichnet!) von C und C' , d. h. zwei birational äquivalente Kurven des S_r ($r \geq 3$) lassen sich stets durch eine Cremona-Abbildung des S_r ineinander überführen. Der einfache Beweis verläuft so: erst ist $C \sim$ seiner ebenen Projektion von einem beliebigen Punkte aus; ferner ist $C_1 \sim C_2$, wenn die ebenen Kurven C_1, C_2 die Bilder zweier linearer Teilscharen der gleichen Vollschar auf einer C sind; schließlich ist $\bar{C} \sim C'$, wenn \bar{C}, C' die Bilder zweier nichtspezieller Linearscharen auf einer C sind. Der bewiesene Satz gestattet eine wichtige Folgerung: Sind zwei Kurven C, C' des S_r ($r \geq 3$) birational äquivalent, so lassen sie sich stets durch eine solche Cremona-Abbildung des S_r ineinander überführen, bei der eine einfach durch C gehende Fläche F in eine Bildfläche F' übergeht, die längs C' mit einem vorgegebenen, C' einfach enthaltenden Flächenstreifen \bar{F} eine Berührung beliebig hoch vorgegebener Ordnung eingeht.

Harald Geppert (Berlin).

Keller, Ott-Heinrich: Zu einem Satze von H. W. E. Jung über ganze birationale Transformationen der Ebene. J. reine angew. Math. 186, 78—79 (1944).

Die Arbeit knüpft an eine vorangehende von H. W. E. Jung (vgl. dies. Zbl. 27, 85) an und bringt die im zugehörigen Referat angedeutete Vereinfachung des Beweises, daß sich jede ganze ebene Cremona-Transformation aus Affinitäten und Additionstransformationen der Gestalt $x' = x$, $y' = y + ax^n$ zusammensetzen läßt. Verf. beruft sich dazu auf den klassischen Satz von Max Noether, wonach die Gruppe aller ebenen Cremonaabbildungen erzeugt wird durch die Projektivitäten, die quadratischen Transformationen und die sog. Segre-Transformationen, die sich projektiv in der Gestalt $x'_1 = x_1 x_3^{n-1}$, $x'_2 = x_2 x_3^{n-1} + P_n(x_1, x_3)$, $x'_3 = x_3^n$, P_n Form n -ten Grades, schreiben lassen. Aus der Tatsache, daß bei ganzen Cremonaabbildungen in beiden Ebenen die Ferngeraden die einzigen Hauptkurven sind, folgert Verf. sofort, daß diese sich allein durch Segretransformationen in der Ordnung erniedrigen lassen; dies liefert den Jungschen Satz.

Harald Geppert (Berlin).

Derwidié, L.: Sur les transformations birationnelles de l'espace laissant invariants les courbes d'une congruence linéaire. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 29, 187—193 (1943).

G bedeute eine Kongruenz von Kurven γ der Ordnung ν und des Geschlechts π im S_3 . Dann ist nach Godeaux die Anzahl der Brennpunkte auf einer γ gleich $2\pi - 2 + 4\nu$. Für dieses Ergebnis gibt Verf. eine funktionale Deutung durch Linear-scharen auf γ . Ist G insbesondere eine lineare Kongruenz und existiert eine Cremona-transformation T des S_3 , die jede γ in sich überführt, so bilden die Brennpunkte von G singuläre Kurven Γ , die durch T miteinander vertauscht werden; Γ kann auch für T Fundamentalkurve 1. oder 2. Art sein. Ist keine singuläre Kurve Fundamentalkurve 1. Art, so ist T eine Projektivität. Den Sonderfall $\pi = 1$ verfolgt Verf. weiter.

Harald Geppert (Berlin).

Baudoux, Roger: Sur les involutions du second ordre de l'espace dont les couples appartiennent aux rayons d'un complexe linéaire. 2. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 29, 8—14 (1943).

Verf. hat in mehreren vorangehenden Arbeiten (vgl. dies. Zbl. 27, 86, 329; 28, 82) involutorische Cremona-Transformationen T des S_3 in sich studiert, bei denen die Verbindungsstrahlen entsprechender Punkte einem linearen Komplex Σ angehören und jeder Komplexstrahl n Paare entsprechender Punkte trägt. Er setzt hier voraus, daß T eine einzige Fundamentalkurve 1. Art Γ der Ordnung λ und weiterhin eine Deckpunktfäche Δ der Ordnung m , die μ -fach durch Γ geht, aber sonst keine Deckpunkte besitzt und die den Ebenen durch T zugeordneten Flächen Φ ν -fach durch Γ gehen und in keinem Punkte von Γ feste Berührungsebenen besitzen. Verf. zeigt, daß dann nur zwei Fälle eintreten können: 1. $n = 1$, $\lambda = 10$, $m = 8$, $\mu = 2$, $\nu = 3$. Φ hat die Ordnung 11 und geht einfach durch die 20 Quadrisekanten von Γ , die die Fundamentalgeraden 2. Art von T sind und durch die auch Δ einfach geht. 2. $n = 1$, $\lambda = 8$, $m = 4$, $\mu = 1$, $\nu = 2$. Φ hat die Ordnung 7 und geht einfach durch die 10 Quadrisekanten von Γ , die die Fundamentalgeraden 2. Art von T sind; durch 8 derselben (aber nicht durch die restlichen 2) geht Δ einfach. Beide Cremona-Transformationen wurden schon von Montesano entdeckt.

Harald Geppert (Berlin).

Bompiani, Enrico: Sur les directions inflexionelles d'une transformation de De-Jonquières. Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. 26, 1—3 (1943).

Sind zwei projektive Ebenen π , π' durch eine Punkttransformation T auf einander bezogen, P , P' entsprechende Punkte, so gibt es in P drei Richtungen r_i und in P' drei entsprechende Richtungen r'_i , die sog. Haupt- oder Wende- oder charakteristischen Richtungen, so daß jede Kurve von π , die in P einen Wendepunkt mit der Wendetangente r_i hat, durch T in eine Kurve von π' übergeht, die in P' einen Wendepunkt mit der Wendetangente r'_i hat. Ist T speziell eine Cremona-Abbildung, die in π (π')

durch ein den Geraden der anderen Ebene entsprechendes homaloidisches Kurvennetz \mathfrak{C} (\mathfrak{C}') beschrieben wird, so sind die Hauptrichtungen in P die Wendetangenten in P an diejenigen durch P gehenden Kurven aus \mathfrak{C} , die dort einen Wendepunkt besitzen, bzw. ihre Polaren beliebiger Ordnung (≥ 2) bezüglich P . Verf. stellt sich die Aufgabe der Bestimmung dieser Hauptrichtungen im Sonderfalle, daß T eine Jonquières-Transformation ist, d. h. \mathfrak{C} aus den C^n mit einem $n - 1$ -fachen Punkt O und weiteren 2 ($n - 1$) einfachen Basispunkten A_k besteht*. Dazu wird die C^{n-1} aufgesucht, die in O die Vielfachheit $n - 2$, in den A_k die Vielfachheit 1 besitzt, das dreidimensionale System \mathfrak{C} der Kurven E^n gebildet, die in O mit C^{n-1} die $n - 2$ Tangenten gemein haben und durch alle A_k laufen, und aus \mathfrak{C} die Kurve e^n herausgegriffen, die in P einen Doppelpunkt aufweist; deren beide Tangenten in P und die Gerade OP bilden die drei Hauptrichtungen von T in P .

Harald Geppert (Berlin).

Burniat, Pol: Sur les systèmes i -canoniques des surfaces cycliques. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 29, 204—214 (1943).

Die Arbeit setzt eine früher erschienene (dies. Zbl. 23, 368) fort. Die Gleichungen $\varphi(x, y, z) = 0$, $\frac{1}{f}\overline{f(x, y, z)} = u$, wo φ ein irreduzibles, f ein Polynom μn -ten Grades, das nicht Potenz eines Polynoms ist, n eine Primzahl bezeichnen, stellen im S_4 mit den kartesischen Koordinaten x, y, z, u eine Fläche F_1 dar, die eine zyklische Involution I_n trägt, welche durch die Projektivität $H: x' = x, y' = y, z' = z, u' = \varepsilon u$, $\varepsilon =$ primitive n -te Einheitswurzel, erzeugt wird und $\varphi = 0$ zur Bildfläche hat. In dieser Arbeit untersucht Verf. das Verhalten der mehrfach-kanonischen Systeme. Der Schnitt der Flächen $f = 0$, $\varphi = 0$ läßt sich zerlegen: $(f, \varphi) = \sum_{i=1}^{n-1} i\Delta_i + n\Delta_n$, wobei jedes Δ_i eine einfache Kurve bedeutet. Man bezeichnet dann $\Delta^1 = \sum_{i=1}^{n-1} i\Delta_i$ als die signierte Übergangskurve von F_1 . Zur gleichen Klasse wie F_1 gehören auch die Flächen F_j mit den Gleichungen: $u = \sqrt[n]{f^j}$, $\varphi = 0$; setzt man $i j = \alpha_{ij} n + i_j$, $0 < i_j < n$, so ist die signierte Übergangskurve von F_j gleich $\Delta^j = \sum_{i=1}^{n-1} i_j \Delta_i$. Ist λ die Schnittkurve der Fernebene des S_4 mit $\varphi = 0$, so gilt die Äquivalenz:

$$\Delta^j \equiv n\delta^j, \quad \delta^j = j\mu\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ij} \Delta_i - j\Delta_n.$$

Schließlich bezeichne Δ_s^j die Summe der Δ_i mit negativem Koeffizienten in der Kombination $\sum_{i=1}^{n-1} (n - s - i_j) \Delta_i$. Dann sind die n Systeme der $(qn + s)$ - und q -fach ($0 \leq s < n$) kanonischen Kurven auf F_1 , die gegenüber H invariant sind, die, deren Bildkurven auf $\varphi = 0$ die $(qn + s)$ - bzw. qn -fach Adjungierten der Systeme $|(qn + s - q - 1)\Delta|$, $|(qn + s - q - 1)\Delta + \delta^j - \Delta_s^j|$ bzw. $|(qn - q - 1)\Delta + \Delta|$, $|(qn - q - 1)\Delta + \delta^j|$, sind, zuzüglich eines aus Deckpunkten von I_n gebildeten festen Bestandteiles; dabei ist $\Delta = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta_i$ gesetzt. Hat insbesondere die n -fache Fläche $n\varphi$ keine effektive Übergangskurve, so ist im Vorangehenden $\Delta = \Delta^j = \Delta_s^j = 0$, $\delta^j = j(\mu\lambda - \Delta_n)$ zu setzen.

Harald Geppert (Berlin).

Segre, B.: On limits of algebraic varieties, in particular of their intersections and tangential forms. Proc. London Math. Soc., II. s. 47, 351—403 (1942).

I. Nach Chow und v. d. Waerden lassen sich die rein m -dimensionalen Mannigfaltigkeiten M des Raumes $[r]$ auf Punkte eines Bildraumes abbilden. Wenn der Bildpunkt einer rein m -dimensionalen Mannigfaltigkeit $M(\lambda)$ für $\lambda \rightarrow \lambda_0$ gegen einen bestimmten Punkt, Bildpunkt einer Mannigfaltigkeit M_0 konvergiert, so sagt man $\lim M(\lambda) = M_0$. Existiert dieser Limes nicht, so versteht man unter dem allgemeinen

Limes $\text{Lm } M(\lambda) = \mathfrak{M}_0$ die (nicht leere) Menge der Limes aller konvergenten Teilfolgen. Die Vereinigungsmenge von \mathfrak{M}_0 ist der allgemeine Limes aller Punktfolgen $Q(\lambda)$ auf $M(\lambda)$. Aus $M(\lambda) \subset N(\lambda)$ folgt $\text{lim } M(\lambda) \subset \text{lim } N(\lambda)$ in einem bestimmten, scharfen Sinne. II. Die Multiplizitäten der irreduziblen Bestandteile einer Schnittmannigfaltigkeit (MN) oder allgemeiner $(M^1 M^2 \dots M^h)$ werden auch für den Fall definiert, daß der Durchschnitt nicht die normale Dimension hat. Aus $\text{lim } M(\lambda) = M_0$ und $\text{lim } N(\lambda) = N_0$ folgt, wenn der Durchschnitt $L(\lambda) = (MN)$ rein d -dimensional ist und $\text{lim } L(\lambda) = L_0$ existiert, $L_0 \subset (M_0 N_0)$. III. Der Limes einer Kurve vom Geschlecht p hat höchstens das Geschlecht p . Der Limes der Schnittpunktgruppe von zwei Kurven $A(\lambda)$ und $A'(\lambda)$ auf einer Fläche V wird zunächst bestimmt in dem Fall, daß A' nicht von λ abhängt, sodann unter drei einschränkenden Voraussetzungen auch in dem Fall, daß A und A' beide von λ abhängen. An Hand des letzten Ergebnisses wird ein Beispiel von Enriques analysiert. IV. Allgemein wird der Limes der h -dimensionalen Schnittmannigfaltigkeit von $t - h$ Mannigfaltigkeiten von $t - 1$ Dimensionen, die sich auf einer t -dimensionalen Mannigfaltigkeit V je in einer linearen Schar bewegen, unter geeigneten Voraussetzungen bestimmt. V. Der Limes der Gesamtheit der ∞^{t-1} Hyperebenen, die eine Mannigfaltigkeit A berühren, die gegen eine zerfallende Mannigfaltigkeit strebt, wird unter geeigneten Voraussetzungen bestimmt. VI. Ein analytisches System von analytischen Hyperflächen F enthalte eine Hyperfläche F_0 , die in einem Punkt O eine algebroide Singularität hat. Ist nun \mathfrak{L} ein analytischer Kurvenzweig in O , so wird im allgemeinen durch jeden Punkt P von \mathfrak{L} eine Hyperfläche F_P des Systems gehen, die in P einen einfachen Punkt hat. Der Limes der Tangentialhyperebene von F_P in P für $P \rightarrow P_0$ wird unter geeigneten Voraussetzungen bestimmt. VII. Das Ergebnis von V wird nun ausgedehnt auf den Fall einer $(t - 1)$ -dimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeit A , die auf einer singularitätenfreien t -dimensionalen Mannigfaltigkeit V ein analytisches System durchläuft. Mittels einer ausgearteten projektiven Transformation wird eine einfache Grenzlage der Gesamtheit der Tangentialräume des Durchschnittes einer Hyperfläche U mit einer t -dimensionalen Mannigfaltigkeit V gefunden, aus der eine Rangrelation von Severi neu gewonnen wird.

van der Waerden (Leipzig).

Hodge, W. V. D.: The base for algebraic varieties of given dimension on a Grassmannian variety. J. London Math. Soc. **16**, 245—255 (1941).

Bildet man die Teilräume S_p eines Raumes S_n auf Punkte eines Bildraumes S_N ab, so ist die Gesamtheit aller dieser Bildpunkte die Grassmannsche Mannigfaltigkeit $\Omega_{n,p}$. Jedem Punkt von $\Omega_{n,p}$ entspricht also ein p -Raum S_p in S_n , und einer algebraischen Teilmannigfaltigkeit M von $\Omega_{n,p}$ entspricht eine algebraische Kongruenz von p -Räumen. Besondere Teilmannigfaltigkeiten M sind die Schubertschen Mannigfaltigkeiten Ω_{a_0, \dots, a_p} , deren entsprechende Kongruenzen jeweils bestehen aus den p -Räumen, die einer Schubertschen Bedingung (a_0, \dots, a_p) genügen. Es wird bewiesen, daß diese Schubertschen Mannigfaltigkeiten eine algebraische Basis für alle Teilmannigfaltigkeiten von $\Omega_{n,p}$ bilden, d. h. daß jede Teilmannigfaltigkeit M stetig und algebraisch in eine Summe von Schubertschen Mannigfaltigkeiten übergeführt werden kann. Die Beweismethode ist die auf G. Schaake zurückgehende Methode der singulären Kollineationen. Bei den benutzten singulären Kollineationen wandern alle Punkte des Raumes S_n in einen festen Punkt Q hinein, mit Ausnahme der Punkte P eines Raumes S_{n-1} , deren Bildpunkte unbestimmt werden. Diese singulären Kollineationen können durch Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 1$ aus nichtsingulären erhalten werden. Transformiert man nun eine Kongruenz M mit einer solchen Kollineation und macht den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 1$, so geht M in eine zerfallende Kongruenz $A + B$ über, wobei A besteht aus allen p -Räumen in einer gewissen Mannigfaltigkeit von $(p+1)$ -Räumen durch Q , während B besteht aus lauter p -Räumen durch Q .

van der Waerden (Leipzig).

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

García-Serrano, Vicente Inglada: Skalare, Vektoren und Tensoren. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid **37**, 282—293 (1943) [Spanisch].

Elementare Betrachtungen im R_3 der in der Aufschrift angezeigten Größen, wobei diese Größen nicht nur vom Orte, sondern in jedem Punkte auch von Richtungen abhängen. *Hlavatý (Prag).*

Hadwiger, H.: Bemerkung über vierdimensionale reguläre Polytope und Quaternionen. Mitt. naturforsch. Ges. Bern **1942**, LVIII—LX (1943).

Die n Eckpunkte eines regulären Körpers im Quaternionenraum, dessen Mittelpunkt der Ursprung ist, seien durch die n Quaternionen q_1, q_2, \dots, q_n gegeben. Dann gilt

$$\frac{q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2}{|q_1|^2 + |q_2|^2 + \dots + |q_n|^2} = -\frac{1}{2}.$$

Hofreiter (Braunschweig).

Alt, H.: Die Kardanlagen von Getriebegliedern und die Krümmung der Polkurven. Ing.-Arch. **14**, 319—331 (1944).

Eine beliebig bewegte Ebene befindet sich in einer Kardanlage, wenn der Krümmungshalbmesser der ruhenden Polkurve doppelt so groß ist als der der bewegten Polkurve und die beiden Krümmungsmittelpunkte auf der gleichen Seite der Polbahntangente liegen; oder auch, wenn der Wendekreis Krümmungskreis der bewegten Polkurve ist. Die ebene Bewegung verhält sich dann durch vier unendlich benachbarte Lagen der Ebene wie eine Kardanbewegung. Durch den Krümmungsmittelpunkt einer ebenen Kurve sind im allgemeinen nur drei unendlich benachbarte Punkte der Kurve bestimmt; vier nur in solchen besonderen Punkten, in denen die ebene Kurve von ihrem Krümmungskreis vierpunktig berührt wird. Bei einer ebenen Bewegung sind im allgemeinen in jeder Stellung unendlich viele Punkte vorhanden, für welche vier unendlich benachbarte Lagen auf je einem Kreis liegen. Ihr geometrischer Ort ist die Kreispunktkurve der betrachteten Stellung; die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte erfüllen die Angelpunktkurve. Sind zwei Punkte A, B der Kreispunktkurve einer Stellung der bewegten Ebene und die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte bekannt, so können die Krümmungshalbmesser der beiden Polkurven bestimmt werden. Verf. gibt zu ihrer Ermittlung ein gemischt zeichnerisch-rechnerisches Verfahren an, dem Formeln von M. Grübler zugrundeliegen. Dieses Verfahren kann leicht bei einem Dreistabgetriebe angewandt werden, weil in den beiden Koppelgelenkpunkten stets zwei Punkte A, B der zuletzt angegebenen Art bekannt sind. Entsprechend wird auch weiterhin insbesondere die Bewegung der Koppel Ebene eines Dreistabgetriebes betrachtet. Für diese ergeben sich als Kardanlagen die Totlagen und jene Lagen, bei welchen das Lot aus dem Momentanzentrum auf die Steggerade diese in ihrem Schnittpunkt mit der Koppelgeraden trifft. Zur Ermittlung der Kardanlagen der letzteren Art gibt Verf. mehrere zeichnerische Wege an, bei welchen entweder Einschaltung bei einer Schaubildkurve oder eine Fehlerkurve oder die Schnittpunkte zweier Schaubildkurven verwendet werden. Verf. stellt noch die irrige Angabe in Rauh, Marks, Bündgens, Otto, Praktische Getriebetechnik, H. 2, S. 32f., VDI-Verlag 1938, richtig, die Kardanlagen einer beliebig bewegten Ebene seien diejenigen, in denen der Wendekreisdurchmesser einen Extremwert annimmt. Diese Lagen fallen vielmehr im allgemeinen nicht mit den Kardanlagen zusammen. *Wilhelm Schmid.*

Bottema, O.: Über Bewegungen des elliptischen Raumes, bei denen alle Punkte kongruente ebene Linien beschreiben. Versl. Nederl. Akad. Wetensch. **53**, 25—29 (1944).

G. Darboux hat im 3. Anhang zu G. Koenigs Leçons de cinématique (1897) folgende Frage gelöst; Im euklidischen R_3 die zwangsläufigen Bewegungsvorgänge mit ebenen Punktbahnen zu finden. Außer den trivialen Lösungen (feste Ebene) findet er gewisse Bewegungsvorgänge (mit fester Richtung), deren Bahnen (nicht kongruente) Ellipsen sind. Daran anknüpfend wurden hier im elliptischen R_3 die

zwangsläufigen Bewegungsvorgänge ermittelt, deren Punktbahnen eben, kongruent und kongruent bezogen sind. Verf. findet: Bedeutet X eine Quaternion, e_i ihre Einheiten

$$X = e_0 x_0 + e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3, \quad \bar{X} = e_0 x_0 - e_1 x_1 - e_2 x_2 - e_3 x_3$$

und $X\bar{X} = 1$ die absolute Quadrik, so lassen sich die gewünschten Bewegungsvorgänge im wesentlichen so darstellen

$$X(t) = Q(t) \cdot X_0 \quad \text{mit} \quad Q(t) = e_0 q_0(t) + e_1 q_1(t) + e_2 q_2(t).$$

Sie bestehen aus linken Schiebungen (Clifford), und ihre Bahnen gehen durch rechte Schiebungen ineinander über. Nimmt man zu Q noch ein Glied mit e_3 , so erhält man auch die Bewegungsvorgänge mit unebenen kongruenten Bahnen.

Blaschke (Hamburg).

Bottema, O.: Die besonderen Bewegungen von Darboux in elliptischen Räumen. Versl. Nederl. Akad. Wetensch. 53, 58—65 u. dtsch. Zusammenfassung 65 (1944).

Bewegt man den elliptischen Raum um ein festes (polares) Achsenpaar l_1, l_2 so, daß ein Raumpunkt X stets in einer Ebene ξ bleibt, so beschreibt zunächst X einen Kegelschnitt (Schnitt der Ebene ξ mit der Cliffordschen Fläche Φ von X bezüglich der polaren Achsen l_1, l_2), und neben X beschreibt auch, wie unmittelbar zu sehen ist, jeder andere Raumpunkt einen Kegelschnitt. Dies ist das genaue Gegenstück der besonderen (euklidischen) Darbouxschen Bewegung, die u. a. von Mannheim, Grünwald, Study ausführlich untersucht und in letzter Zeit neben den dabei erzeugten Regelflächen auch von Krames und Ref. als „aufrechte Ellipsenbewegung“ studiert worden ist (vgl. dies. Zbl. 23, 72). Verf. leitet sie eingangs analytisch aus der Quaternionendarstellung $x' = axb$ der elliptischen Bewegung mit festem polaren Achsenpaar her, indem er die Koordinaten a_i und b_i der Quaternionen a, b als lineare Funktionen eines Parameters t ansetzt. — Es wird u. a. gezeigt, daß die Beziehung zwischen den Raumpunkten X und ihren Bahnebenen ξ ein kubisches Nullsystem ist. Die inverse Bewegung ist von gleicher Art. Eine gerade Linie e erzeugt im Laufe der Bewegung eine rationale Regelfläche vierten Grades (Erzeugnis zweier projektiver Kegelschnitte).

Strubecker (Straßburg).

Woinaroski, Rudolf: Die Kinematik des starren Körpers in einem vierdimensionalen, euklidischen Raum. Disquisit. math. et phys., Bucureşti 3, 119—130 (1943).

Eine starre Bewegung des euklidischen vierdimensionalen Raumes ist im allgemeinen eine Drehung um einen Punkt. Bei einer kontinuierlichen Bewegung des R_4 gibt es daher (wie in der Ebene) als Ort der Momentanpole eine ruhende und eine bewegliche Polbahn, die aufeinander ohne Gleitung abrollend isometrisch bezogen sind, aber nicht umgekehrt die Bewegung festlegen. Wegen der Berührung der Polkurven sind im allgemeinen in jedem Augenblicke ihre Frenetschen Vierbeine gegeneinander durch dreidimensionale Bewegungen versetzt, bei denen also eine durch den Berührungspunkt (Pol) gehende Gerade festbleibt. Diese Gerade erzeugt im ruhenden sowohl wie im bewegten System je eine Regelfläche, der die Polkurven aufgeschrieben sind. Es ist möglich, die kontinuierliche vierdimensionale Bewegung durch diese Figuren zu rekonstruieren. Durch die geometrischen Elemente der Regelflächen und Polkurven können die kinematischen Elemente der Bewegung, insbesondere ihr Geschwindigkeitstensor, ausgedrückt werden. — Neben den allein behandelten allgemeinen Fall treten späterem Studium vorbehaltene Sonderfälle.

K. Strubecker.

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Huron, Roger: Sur la torsion des courbes gauches. C. R. Acad. Sci., Paris 216, 791—792 (1943).

Zu einer gegebenen Raumkurve C gibt es in einem Punkte P im allgemeinen genau eine berührende gemeine Schraubenlinie S gleicher Krümmung und Windung; sie ist in der Gesamtheit der C in P in zweiter Ordnung berührenden gemeinen Schrauben-

linien dadurch gekennzeichnet, daß eine in der Nähe von P parallel zur Normalebene von C in P gezeichnete Ebene C und S in zwei Punkten schneidet, deren Verbindungsgerade parallel der Hauptnormalen von C in P ist. Diese Tatsache gibt die Möglichkeit, für eine Punktmenge E mit Häufungspunkt P und daselbst eindeutig erklärter Halbtangente und Kreiskontingente durch obige Konstruktion unter den in zweiter Ordnung berührenden Schraubenlinien eine auszusondern und mittels ihrer die Windung von E in P zu definieren. — C sei jetzt der Ebenenschnitt einer Fläche F durch P , C' eine Raumkurve durch P mit daselbst dem gleichen Krümmungskreis k wie C , C'' die durch Projektion von C' parallel zur Hauptnormale von C' in P auf F entstehende Kurve, dann haben C' , C'' den Krümmungskreis k und die Windung gemein; Sonderfall $F = \text{Kugel}$.
Harald Geppert (Berlin).

Delmas Lopez, Fermín: Über einen Satz der Differentialgeometrie. Euclides 4, 388—390 (1944) [Spanisch].

Verf. beweist den selbstverständlichen Satz, daß sich die Tangentenflächen zweier zur gleichen Raumkurve C gehörigen Filarevoluten längs C unter festem Winkel schneiden.
Harald Geppert (Berlin).

Löbell, Frank: Zur Theorie der Flächenabbildungen. Math. Z. 49, 427—440 (1944).
 $x(u, v)$, $y(u, v)$ seien zwei durch gleiche Parameterpaare aufeinander abgebildete Flächen. Neben ihren Fundamentalgrößen 1. Ordnung E, F, G bzw. E', F', G' führt Verf. die „gemischten“ Fundamentalgrößen 1. Ordnung ein: $\bar{E} = x_u y_u$, $\bar{F}_1 = x_u y_v$, $\bar{F}_2 = x_v y_u$, $\bar{G} = x_v y_v$. Zwischen ihnen besteht eine Determinantenidentität und bei reellen Flächen eine Reihe von Ungleichungen. Mittels dieser Größen läßt sich der Winkel zweier durch die Abbildung aufeinander bezogener Flächenelemente, die Schnittgerade der Berührungsebenen in entsprechenden Punkten und die gegenseitige Lage entsprechender Linienelemente kennzeichnen. Besondere Abbildungen: 1. Entsprechende Linienelemente stehen aufeinander senkrecht: $\bar{E} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{G} = 0$, 2. entsprechende Flächenelemente stehen senkrecht: $\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1\bar{F}_2 = 0$, 3. entsprechende Flächenelemente sind parallel: $(\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1\bar{F}_2)^2 = (EG - F^2)(E'G' - F'^2)$; das Vergrößerungsverhältnis der Flächenelemente ist: $M = (\bar{E}\bar{G} - \bar{F}_1\bar{F}_2) : (EG - F^2)$; sind μ_1, μ_2 die Abbildungsmaßstäbe in den beiden Fixrichtungen der Abbildung durch einen Punkt, so ist $\mu_1 \mu_2 = M$. 4. Es gibt im allgemeinen in einem Punkt von x ein Paar orthogonaler Berührungsvektoren (sog. Hauptrichtungen), dem in y wieder ein orthogonales Tangentenpaar entspricht; ist δ der Winkel, um den man das erste Paar drehen muß, bis es mit dem Bildpaar zur Deckung kommt, so heißt $\tan \delta$ das Verdrehungsmaß; nur im Falle indirekter Winkeltreue verliert es seinen Sinn. Sind m_1, m_2 die Verzerrungsmaßstäbe in den Hauptrichtungen, so gilt $\cos \delta = (\mu_1 + \mu_2)/(m_1 + m_2)$. Die Größe $V' = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \right)$, die auch durch die 10 Fundamentalgrößen 1. Ordnung ausgedrückt wird, heißt modifiziertes Verzerrungsmaß der Flächen. Ein Spezialfall dieser Abbildung durch parallele Normalen ist die Gaußsche Abbildung auf die Kugel; sie ist verdrehungsfrei. Zum Schluß weist Verf. darauf hin, daß $M = m_1 m_2 = \mu_1 \mu_2$ und $(m_1 + m_2) \cos \delta$ Affinvarianten sind, insbesondere ist die Eigenschaft der Abbildung, unendlich großes Verdrehungsmaß zu besitzen ($\delta = \pm \pi/2$), affinvariant.
Harald Geppert.

Friedlander, F. G.: Note on a limit related to the curvatures of two surfaces. Proc. Cambridge Philos. Soc. 38, 399—400 (1942).

O sei ein elliptischer Punkt einer Fläche F : $z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} + \dots$, S_0 sei eine andere, F in O berührende Fläche, etwa mit der Entwicklung:

$$z = \frac{(x \cos \theta + y \sin \theta)^2}{2R'_1} + \frac{(-x \sin \theta + y \cos \theta)^2}{2R'_2} + \dots,$$

schließlich S_h die Parallelfäche zu S_0 im Abstände h . Ist A_h der Flächeninhalt des von F auf S_h ausgeschnittenen Flächenstückes, so ermittelt Verf. den Grenzwert:

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_h}{\Delta_0} = \frac{2\pi}{\Delta_0}$ mit $\Delta_0^2 = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1'}\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_2'}\right) \cos^2 \theta + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2'}\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1'}\right) \sin^2 \theta$, vorausgesetzt, daß $\Delta_0^2 > 0$ ist. Sonderfälle: 1. $S_0 = \text{Ebene}$, $\Delta_0^2 = \text{Gaußsches Krümmungsmaß } K \text{ von } F \text{ in } P$ [vgl. W. Blaschke, Differentialgeometrie I, 120 (1930)], 2. $S_0 = \text{Kugel}$, 3. S_0 entstehe durch Spiegelung von F an der Ebene $z = 0$ und nachfolgende Drehung um θ um die z -Achse; dann ist $\Delta_0^2 = 4(K \cos^2 \theta + H^2 \sin^2 \theta)$.

Harald Geppert (Berlin).

Bol, G.: Über Nabelpunkte auf einer Eifläche. Math. Z. **49**, 389—410 (1944).

Für die Carathéodorysche Vermutung, daß jede Eifläche wenigstens zwei Nabelpunkte aufweisen muß, hat zwar H. Hamburger (vgl. dies. Zbl. **23**, 69; **24**, 176; **25**, 424) einen recht verwickelten analytischen Beweis gegeben, doch ist die erneute Inangriffnahme des Problemkreises durch einen erfahrenen Geometer, wie sie hier geschieht, ein dringendes Bedürfnis. In Bonnetschen (konjugiert-komplexen) Ebenenkoordinaten u, v stellt sich die Eifläche durch eine reellwertige Funktion $w(u, v)$ dar, für die in einem Nabelpunkt $w_{uu} (= w_{vv}) = 0$ ist. Es sei nun $u = v = 0$ der als isoliert angenommene Nabelpunkt, $w_{uu} = x + iy$; durchläuft dann u in positivem Sinne einen kleinen Kreis um den Nullpunkt, so entsteht in der x, y -Ebene eine geschlossene Kurve K , die sog. „Kennlinie“ des Nabels; N sei deren Umlaufszahl um den Nullpunkt: $N = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg w_{uu}$, d. h. ihre Kroneckersche Charakteristik bezüglich O . Dann beweist Verf. zunächst den Hauptsatz: Falls $w(u, v)$ in der Umgebung von O in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, ist $N \geq -2$. In Verbindung mit der Tatsache, daß bei lauter isolierten Nabeln auf einer Eifläche $\sum N = -4$ gilt, ergibt sich dann die Carathéodorysche Vermutung. — Zum Beweise des Hauptsatzes setze man $u = \varrho e^{i\theta}$, $v = \varrho e^{-i\theta}$, also

$$w(\varrho, \theta) = \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^m w_m(\theta), \quad k \geq 3;$$

dann lauten die Gleichungen der Kennlinie (KL) K von O :

$$x = \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^{m-k} [w_m'' - m(m-2)w_m], \quad y = \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^{m-k} [2(m-1)w_m']. \quad (1)$$

Beschränkt man sich in den rechten Seiten von (1) auf das Glied $m = k$, so erhält man die von ϱ unabhängige sog. „Hauptkennlinie“ (HKL) des Nabels, in deren Streifenumgebung offenbar bei kleinem ϱ die KL verläuft. Geht nun die HKL nicht durch den Nullpunkt, so heißt der Nabel regulär; dann haben KL und HKL die gleiche Umlaufszahl $N_1 = N + 2$, und diese ist ≥ 0 nach folgendem, geometrisch leicht einzusehenden Hilfssatz: Die Kurve $x = f''(t) - A f(t)$, $y = f'(t)$, $[A = \text{const} > 0$, $f(t + 2\pi) = f(t)$ zweimal stetig differenzierbar] hat bezüglich jedes Punktes ihrer Ebene nichtnegative Umlaufszahl. Schwierigkeiten macht jetzt nur der Fall der „singulären“ Nabelpunkte, bei denen in den Gleichungen der HKL x und y in O eine gemeinsame mindestens doppelte Nullstelle haben, also w_k für einen θ_0 -Wert ($= 0$) eine mindestens vierfache Nullstelle besitzt. Dann muß man w nach Potenzen von ϱ und θ entwickeln und auf dem Umweg über die Puiseux-Entwicklungen $\theta(r)$ der Nullstellen dieser Funktion die KL transformieren. Auch hier verhilft ein Hilfssatz zur Behauptung $N_1 \geq 0$: Die Kurve $x = A t f'(t) - f(t)$, $y = f'(t)$, in der $f(t) = \text{Polynom } k\text{-ten Grades}$, A konstant mit $1 - A k > 0$ ist, hat bezüglich jedes Punktes ihrer Ebene eine nichtnegative Umlaufszahl. Natürlich liegt in der sauberen Behandlung der singulären Nabel die Hauptschwierigkeit. Der geschilderte Beweis des Hauptsatzes bleibt auch noch dann gültig, wenn man die Voraussetzung über die Entwickelbarkeit von w nach u, v etwas abschwächt. — Den Schluß bilden Ausblicke auf die noch unbekannten Abschätzungen für $\Delta \arg \frac{\partial^n w}{\partial u^n}$ nach unten. Aus dem oben bewiesenen Hauptsatz läßt sich ein Nullstellensatz für Polynome folgern: Ist $P(z)$ ein Polynom

k -ten Grades, dessen Nullstellengesamtheit bei Spiegelung am Einheitskreis in sich übergeht, so hat $P''(z)$ im abgeschlossenen Einheitskreis wenigstens $\frac{k}{2} - 2$ Nullstellen.

Harald Geppert (Berlin).

Gheorghiu, Gh. Th.: Sur une quadrique attachée à une courbe gauche sur une classe de surfaces. Disquisit. math. et phys., București 2, 99—107 (1942).

Es werden zunächst die Flächen zweiter Ordnung Φ bestimmt, welche eine Raumkurve in ihren Punkten in fünfter Ordnung berühren und den Nullpunkt O als Mittelpunkt haben. Als Anwendung werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angegeben, daß eine bis auf Zentroaffinitäten bestimmte Kurve auf einer solchen Fläche Φ liegt. Der Sonderfall des Kegels zweiter Ordnung liefert die Kurven von Tzitzeica. — Durch jeden Punkt P einer Fläche laufen zwei Asymptotenlinien. Ihre oben definierten Schmieglflächen seien Φ_1 und Φ_2 . Es wird gezeigt, daß lediglich die Fläche $xyz = 1$ und ihre zentroaffinen die Eigenschaft haben, daß in allen ihren Punkten $\Phi_1 = \Phi_2$ ist. Soll die Fläche aber Regelfläche sein, so ist sie von zweiter Ordnung. — Endlich werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angegeben, daß die Schmieglflächen Φ_1 und Φ_2 in allen Punkten einer gewissen Flächengattung „ S'' “ sich doppelt berühren, d. h. nach zwei Kegelschnitten durchdringen. Z. B. hat die Drehfläche $x^2(y^2 + z^2)^{11} = 1$ diese Eigenschaft. Strubecker (Straßburg).

Lense, Josef: Über einige Determinanten aus der Theorie der mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 119, 216—220 (1944).

Ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u_1, u_2, \dots, u_m)$ eine Mannigfaltigkeit V_m des Euklidischen R_n , so transformiert sich die Determinante

$$G_k = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}_{u_1}^2 & \mathfrak{x}_{u_1} \mathfrak{x}_{u_2} & \dots & \mathfrak{x}_{u_1} \mathfrak{x}_{u_m} & \mathfrak{x}_{u_1} \mathfrak{x}_{u_1 u_1} & \dots \\ \mathfrak{x}_{u_2} \mathfrak{x}_{u_1} & \mathfrak{x}_{u_2}^2 & \dots & \mathfrak{x}_{u_2} \mathfrak{x}_{u_m} & \mathfrak{x}_{u_2} \mathfrak{x}_{u_1 u_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{x}_{u_m} \mathfrak{x}_{u_1} & \mathfrak{x}_{u_m} \mathfrak{x}_{u_2} & \dots & \mathfrak{x}_{u_m}^2 & \mathfrak{x}_{u_m} \mathfrak{x}_{u_1 u_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

bei Einführung eines Parameter u'_μ nach der Regel $G_k = D^{2p} G'_k$, wobei $p = \sum_{\alpha=0}^{k-1} \binom{m+\alpha}{\alpha}$

ist. Von diesem Satze werden Anwendungen auf den Normalraum des (durch die abgeleiteten Vektoren $\mathfrak{x}_{u_1}, \mathfrak{x}_{u_2}, \dots, \mathfrak{x}_{u_m}, \mathfrak{x}_{u_1 u_1}$ bis zur k -ten Ordnung aufgespannten) Schmiegraumes k -ter Ordnung der V_m gemacht. Es wird gezeigt, daß dieser Normalraum ein vom Range $n - 2s + r$ isotroper R_{n-s} ist, wenn s die Dimension des Schmiegraumes R_s bezeichnet; der Normalraum R_{n-s} hat dabei mit dem Schmiegraum R_s einen vollisotropen R_{s-r} gemeinsam, unter r immer den Rang von G_k verstanden. Strubecker.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Haantjes, J., und C. Smits: Die Differentialgeometrie von Möbius in der Ebene. Nieuw Arch. Wiskde. N. s. 22, 34—47 (1943).

z sei die komplexe Variable in der Ebene, $z = z(t)$ sei eine Kurve K . Die gegenüber der Möbiusschen Transformation

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

invariante Schwarzsche Ableitung $\{z, t\}$ zerfällt in den reellen Teil $R\{z, t\}$ und den imaginären Teil $I\{z, t\}$ und diese transformieren sich bei $t \rightarrow t'$ nach

$$R\{z, t'\} = \left(\frac{dt}{dt'}\right)^2 [R\{z, t\} - \{t', t\}], \quad I\{z, t'\} = \left(\frac{dt}{dt'}\right)^2 I\{z, t\}.$$

Aus der zweiten Gleichung entspringt sofort (für $I\{z, t\} \neq 0$) die Existenz des „Konformbogens“

$$\mu = \int \sqrt{|I\{z, t\}|} dt + \text{Konst.},$$

während $q(\mu) = -R\{z, \mu\}$ die „Konformkrümmung“ von K bedeutet. Zu jedem Punkt z von K läßt sich ein Punkt $z_1 = z + 2\Gamma^{-1}$ angeben (mit $\Gamma = -z''(z')^{-2}$). Das durch die Punkte z und z_1 bestimmte Kreissystem sei mit (Γ) bezeichnet. Der in (Γ) sich befindende Tangentialkreis von K (in z) ist der Oskulationskreis, der dazu orthogonale Kreis in (Γ) ist der „Normalkreis“. Ist $d\alpha$ der Winkel von zwei konsekutiven Normalkreisen, so ist

$$\left(\frac{d\alpha}{d\mu}\right)^2 = -2q.$$

Die Funktion Γ dient in üblicher Weise zur Herstellung der kovarianten Ableitungen von Vektoren (mit einziger komplexer Komponente). Hlavatý (Prag).

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Mira Fernandes, Aureliano de: Gesichtspunkte der modernen Differentialgeometrie. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid **37**, 267—281 (1943) [Portugiesisch].

Der Verf. beginnt mit dem Erlanger Programm und mit der Habilitationsschrift von Riemann, um aus der Bedeutung des Levi-Civitaschen Parallelismus den Begriff des (affinen) Zusammenhanges (Cartan, Weyl, Schouten, Struik) abzuleiten unter besonderem Hinweis auf die Strukturgleichungen und Cartanschen Holonomitätsbedingungen. Nachdem wird die Finslersche Geometrie und ihre Verallgemeinerung (Kawaguchi, Synge, Craig u. a.) besprochen und ihr Zusammenhang mit dem Vitalischen Ideenkreis angegeben. (Durch diese knappe Aufzählung wird keineswegs der Inhalt des gedankenreichen Vortrages erschöpft.) Hlavatý (Prag).

Preissmann, Alexandre: Quelques propriétés globales des espaces de Riemann. (122. Jahresvers., Sitten, Sitzg. v. 29.—31. VIII. 1942.) Verh. Schweiz. naturforsch. Ges. **1942**, 78.

Wiedergabe der Hauptergebnisse der in dies. Zbl. **27**, 259 besprochenen Arbeit des Verf. Harald Geppert (Berlin).

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Blanc, E.: Les ensembles surconvexes plans. Ann. École norm., III. s. **60**, 215—246 (1943).

R représentant une constante positive, A et B deux points quelconques du plan \mathfrak{P} dont la distance $\delta(A, B)$ est $\leq 2R$, l'aut. désigne par $L(A, B; \bar{R})$ l'ensemble des points communs aux cercles fermés de rayon R passant par A et B et nomme un vrai sous-ensemble fermé E de \mathfrak{P} surconvexe pour le rayon R , en abrégé $scvR$, si pour tout couple A, B de points de E avec $\delta(A, B) \leq 2R$, la lentille $L(A, B; \bar{R})$ est contenue dans E [cf. déf. chez A. Mayer, Math. Z. **39**, 511—531 (1935) et H. Bückner, Jber. Deutsche Math.-Vereinig. **46**, 96—139 (1936); ce Zbl. **10**, 270; **14**, 361]. Dans le chapitre I du présent mémoire sont établies les propriétés suivantes: Tout ensemble fermé E (de \mathfrak{P}) connexe et $scvR$ est l'intersection d'une famille de cercles fermés de rayon R et inversement. Par tout point P de la frontière F d'un tel ensemble passe au moins une circonférence $C_P(E)$ de rayon R qui est circonférence d'appui (interne) pour E ; F est une ovale (courbe de Jordan fermée, bornée et convexe) dont la courbure inférieure au sens de Menger est partout $\geq 1/R$. L'ensemble fermé $scvR$ le plus général est une somme finie ou dénombrable de continus $scvR$ dont les distances mutuelles sont $> 2R$. Au début du chapitre II est défini l'adjoint RE d'un ensemble E quelconque de \mathfrak{P} comme l'intersection des cercles fermés de rayon R centrés sur E [cf. M. Niculesco, Bull. Cl. Sci. Acad. R. Belg., V. s. **19**, 738—754 (1933); ce Zbl. **7**, 422]. Si $\varrho(E)$ représente le rayon du cercle circonscrit à E , la condition nécessaire et suffisante pour que RE soit non vide est que $\varrho(E)$ soit $\leq R$. Si deux points A et B appartenant respectivement à E et RE sont tels que $\delta(A, B) = R$, A est point frontière de E , B est point

frontière de RE ; deux tels points sont dits opposés dans le couple (E, RE) . À tout point de la frontière de RE correspond au moins un point opposé de F . La recherche des images d'un point de F dans la relation d'opposition conduit à distinguer sur F deux sortes de points: ceux par lesquels passe au moins une circonférence d'appui de E et ceux par lesquels ne passe aucune circonférence d'appui (s. ent., de rayon R'') de E . Les points de la première espèce constituent par définition le front- R , Φ_R de E ; ceux de la seconde espèce constituent le complémentaire Ψ_R de Φ_R sur F . Tout point P de Φ_R admet comme opposés les centres des circonférences d'appui de rayon R de E en P ; aucun point de Ψ_R ne possède d'opposé. La condition nécessaire et suffisante pour que Φ_R soit non vide est que $\varrho(E)$ soit $\leq R$ et nous avons alors les égalités $R\Phi_R = RF = RE$. Les ensembles fermés et connexes $scv R$ sont caractérisés par l'équation $R^2X = X$. Si donc E est un continu $scv R$ il y a réciprocity entre E et $E' = RE$; deux tels ensembles sont dits complémentaires. Pour un ensemble E quelconque avec $\varrho(E) \leq R$, $R^2E = K_R(E)$ se présente comme le plus petit ensemble $scv R$ contenant E ; l'aut. le nomme enveloppante surconvexe R [cf. A. Buter, Dissertation, Groningen 1938 et ce Zbl. 20, 76]. R^2E est la partie commune à tous les cercles fermés de rayon R contenant E ; il est aussi la partie commune à tous les cercles d'appui de rayon R de E . Pour un ensemble E borné quelconque, l'enveloppante convexe \mathfrak{R} est la limite de la famille décroissante des $K_R(E)$ pour $R \rightarrow \infty$. Φ_R est l'intersection de la frontière F de E et de la frontière G de $K_R(E)$; les composantes de $G - \Phi_R$ sont des arcs ouverts de circonférence de rayon R . Soit E un ensemble fermé quelconque de \mathfrak{P} , $S(E)$ l'ensemble obtenu en adjoignant à E toutes les lentilles $L(A, B; R)$ relatives aux couples A, B de E avec $\delta(A, B) \leq 2R$. L'aut. démontre que si $\varrho(E)$ est $\leq R$, $S^2(E)$ est l'enveloppante $scv R$ de E . [Note du Réf. — Pour un ensemble E fermé quelconque lors de la réitération de l'opération S peuvent seuls se présenter les cas suivants: 1. $E_2 = S^2(E)$ est $scv R$, d'ailleurs non connexe si $\varrho(E) > 2R$; 2. $E_2 \subset E_4 \subset \dots$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{2n} = \mathfrak{P}$]. Le chapitre III est consacré tout entier à la démonstration du théorème suivant: Tout continu d'ordre deux relativement à la famille des droites et des circonférences de rayon $> R$, est soit la frontière d'un continu surconvexe R soit un arc d'une telle frontière.

Chr. Pauc (Erlangen).

Dinghas, Alexander: Über eine isoperimetrische Aufgabe von Erhard Schmidt. 1. Math. Z. 49, 734—792 (1944).

In einem elliptischen, hyperbolischen oder euklidischen Raum R_n der Krümmung K mit den der Bedingung (1) $\sum_{v=1}^n x_v^2 + K^{-1}x_{n+1}^2 = K^{-1}$ unterworfenen Weierstraßschen Koordinaten x_1, \dots, x_{n+1} (die Betrachtungen gelten auch für einen sphärischen Raum, wenn man $K^{-\frac{1}{2}}x_{n+1}$ durch x_{n+1} ersetzt) sei \mathfrak{S}_{ab} die Menge aller Punkte, die den Ungleichungen

$$(2) \quad \psi^2(a) \leq \sum_{v=1}^{n-1} x_v^2 \leq \psi^2(b); \quad \psi(x) = K^{-\frac{1}{2}} \sin K^{\frac{1}{2}} x$$

genügen. Die Aufgabe lautet: Unter allen zulässigen, in \mathfrak{S}_{ab} einbeschriebenen Körpern vorgegebener Oberfläche O denjenigen zu bestimmen, der das größte Volumen V aufweist. Im Gegensatz zu E. Schmidt (vgl. dies. Zbl. 26, 154), der nur Drehkörper betrachtet, läßt Verf. zur Konkurrenz alle im Schmidtschen Sinne einfach zusammenhängenden, regulären (darin steckt vor allem die stückweise zweimalige stetige Differenzierbarkeit des Randes!) Körper zu, deren Projektion parallel zur x_n -Achse den Ring (2) völlig ausfüllt und die auf dem Rande von (2) eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit besitzen, die die Oberfläche in zwei getrennte Teile zerlegt (die letzte Voraussetzung kann, wie im Teile II durch eine Verallgemeinerung der Steinerschen Symmetrisierung gezeigt werden wird, weggelassen werden). Wie bei E. Schmidt ergeben sich als Extremalkörper Drehkörper, deren Kontur eine Extremale aus einer von 3 Klassen ist.

Man gewinnt die letzteren in der Metrik (3) $ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)dv^2$, $\varphi(u) = \cos K^{\frac{1}{2}}u$, aus der Differentialgleichung

$$(4) \quad \frac{dv}{du} \pm \frac{k_g \Phi(u)}{\varphi(u) \sqrt{1 - k_g^2 \Phi^2(u)}} = 0,$$

$\Phi(u) = \omega(u) + AG(u)$; $\omega(u) = \psi(u)/\varphi(u)$, $G(u) = \omega(u)/\psi^{n-1}(u)$; A und k_g bedeuten Parameter. Man erhält die drei Klassen folgendermaßen: I. Die Kurven C_I berühren die Geraden $u = a$, $u = b$ der u, v -Ebene nicht und lassen sich so parallel verschieben, daß sie durch $P_1(a, 0)$ und $P_2(b, 0)$ gehen. Sind dann $\bar{\gamma}, \gamma$ die Winkel der Normale in P_1, P_2 gegen die u -Achse, so ist mit einem ganz bestimmten $\gamma_0 > 0$ stets (5) $\gamma_0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$, während sich $\bar{\gamma}$ aus γ eindeutig durch die Forderung

$$(6) \quad I_{\gamma\bar{\gamma}} = \int_a^b \frac{Q_{\gamma\bar{\gamma}}(u) du}{\varphi(u) \sqrt{M^2 - Q_{\gamma\bar{\gamma}}^2(u)}} = 0,$$

$$Q_{\gamma\bar{\gamma}}(u) = [G(a) \cos \gamma + G(b) \cos \bar{\gamma}] \omega(u) - [\omega(a) \cos \gamma + \omega(b) \cos \bar{\gamma}] G(u), \\ M = G(a) \omega(b) - G(b) \omega(a)$$

bestimmt; die zugehörigen Parameter k_g und A ergeben sich aus den Gleichungen:

$$(7) \quad k_g = M^{-1} \cdot [G(b) \cos \bar{\gamma} + G(a) \cos \gamma], \\ A = -[\omega(a) \cos \bar{\gamma} + \omega(b) \cos \gamma] / [G(a) \cos \bar{\gamma} + G(b) \cos \gamma].$$

II. Die Kurven C_{II} lassen sich durch Parallelverschiebung und gegebenenfalls Spiegelung an der v -Achse so legen, daß sie durch P_2 gehen (woselbst die Normale mit der u -Achse den Winkel γ bildet) und die Gerade $u = a$ in einem Punkte $P_a(0, v_a)$ mit $v_a > 0$ berühren; dann ist für alle Punkte von C_{II} $v \geq 0$, weiter $0 < \gamma < \gamma_0$, und die Formeln für k_g, A entstehen aus (7) durch die Setzung $\bar{\gamma} = 0$. III. Die Kurven C_{III} berühren beide Geraden $u = a$ und $u = b$, die entsprechenden Formeln für k_g, A entstehen durch die Setzung $\gamma = \bar{\gamma} = 0$. — Diese Klasseneinteilung, die Existenz von γ_0 und $v_a \geq 0$ und die eindeutige Auflösbarkeit von (6) werden analytisch erschlossen; γ_0 ist die einzige Nullstelle des Integrals I_{γ_0} bei variablem γ . Man erhält nun für die Extremalkörper der Aufgabe ebenfalls drei Klassen, indem man I. eine C_I durch P_1, P_2 legt und an der u -Achse spiegelt, oder II. eine C_{II} samt Spiegelbild oder III. zwei zur u -Achse symmetrisch liegende C_{III} einer nichteuklidischen Rotation um die v -Achse unterwirft. Welcher Klasse ($\mathfrak{R}_I, \mathfrak{R}_{II}$ oder \mathfrak{R}_{III}) der Extremalkörper angehört, hängt von der Größe seiner vorgegebenen Oberfläche ab. Bezeichnet man nämlich mit W_{n-1} den Inhalt der $(n-1)$ -dimensionalen Kugel und setzt

$$O_0 = 2(n-1) W_{n-1} \int_a^b \psi^{n-2}(u) du, \\ (8) \quad O_1 = 2(n-1) W_{n-1} \cdot M \cdot \int_a^b \frac{\psi^{n-2}(u) du}{\sqrt{M^2 - Q_{\gamma_0}^2(u)}}, \\ O_2 = 2(n-1) W_{n-1} \cdot \int_a^b \frac{\varphi(u) \psi^{n-2}(u) M + \varphi(a) \psi^{n-2}(a) Q_{00}(u)}{\sqrt{M^2 - Q_{00}^2(u)}} du,$$

so ist der durch Vorgabe von O eindeutig bestimmte Extremalkörper ein \mathfrak{R}_I , wenn $O_0 < O < O_1$, ein \mathfrak{R}_{II} , wenn $O_1 \leq O < O_2$, ein \mathfrak{R}_{III} , wenn $O_2 \leq O$ ist. Verf. leitet diese Extremumseigenschaft aus einer grundlegenden isoperimetrischen Ungleichung für die zulässigen Vergleichskörper her: Bedeuten \tilde{O}, \tilde{V} Oberfläche und Volumen des jeweiligen Extremalkörpers, k_g den jeweils oben definierten Parameter, so lautet diese:

$$(9) \quad (n-1) k_g (V - \tilde{V}) = (O - \tilde{O}) - 2R,$$

worin R eine nichtnegative, geometrisch deutbare Größe bezeichnet, die genau dann verschwindet, wenn die Oberflächen der verglichenen Körper miteinander kongruent sind. Der Beweis von (9) beruht wesentlich auf dem Gaußschen Divergenzatz; die Einfachheit von (9) und des Ausdruckes für R sind bemerkenswert. Die Eindeutigkeit der Klassenbestimmung des Extremalkörpers durch O erfolgt durch den Nachweis der monotonen Abhängigkeit der Größe O von den Parametern $\gamma, \bar{\gamma}$. — Mit dieser Aufgabe hängt eine zweite zusammen, die Verf. nach Darboux-Schmidt benennt: Unter allen $(n-1)$ -dimensionalen, in \mathfrak{S}_{ab} gelegenen, durch die Schnittgrenzen von (2) mit $x_n = 0$ gehenden, ganz in $x_n \geq 0$ liegenden Flächenstücken \mathfrak{F} gegebener Oberfläche O dasjenige zu bestimmen, das zusammen mit $x_n = 0$ das größte Volumen einschließt.

Harald Geppert (Berlin).

Dinghas, Alexander: Über einen geometrischen Satz von Wulff für die Gleichgewichtsform von Kristallen. Z. Kristallogr. 105, 304—314 (1944).

Nach Gibbs und Curie ist die Gleichgewichtsform eines Kristalles dadurch gekennzeichnet, daß die gesamte freie Energie der Oberfläche: (1) $\Phi = \sum_{i=1}^n F_i \sigma_i$ (F_i = Inhalt der Seitenfläche \mathfrak{F}_i des Polyeders, σ_i = freie Energie von \mathfrak{F}_i , n = Seitenzahl des Kristalls) ein Minimum wird bei gegebenem Volumen des Kristalls. Nach Wulff wird nun dieses Minimum für ein bestimmtes Polyeder \mathfrak{P}_h^* erreicht, in dessen Innern es einen Punkt O gibt, dessen Entfernungen h_i von \mathfrak{F}_i den σ_i proportional sind. Verf. gibt für diesen Wulffschen Satz einen neuen Beweis, der ihn auf den Brunn-Minkowskischen Satz für konvexe Körper zurückführt und den Vorteil hat, als Vergleichspolyeder \mathfrak{P} auch solche mit geringerer Seitenzahl als \mathfrak{P}_h^* zuzulassen und gleichzeitig neben der Existenz von \mathfrak{P}_h^* dessen tatsächliche Minimumeigenschaft bezüglich Φ nachzuweisen. Die zulässigen Vergleichspolyeder \mathfrak{P} konstruiert man so: Man geht aus von nichtkomplanaren Einheitsvektoren π_i ($i = 1, \dots, n$), für die es mindesten seinen Satz positiver Zahlen λ_i mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i \pi_i = 0$ gibt, und zeichnet \mathfrak{P} so, daß seine Seiten die π_i zu Außennormalen und die Abstände $r_i > 0$ von O haben; dann kann \mathfrak{P} auch weniger als n Seiten haben. Bezeichnet dann V bzw. V^* das Volumen von \mathfrak{P} bzw. \mathfrak{P}_h^* , F_i , F_i^* die Seiteninhalte von \mathfrak{P} , \mathfrak{P}_h^* , so folgt aus der Brunn-Minkowskischen Ungleichung

$$\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i F_i \right)^3 V^{-2} \geq \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i F_i^* \right)^3 V^{*-2},$$

woraus der Wulffsche Satz folgt mit der Verschärfung, daß das Gleichheitszeichen nur für $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_h^*$ gilt. Verf. benutzt die Gelegenheit, um für den Beweis des Brunn-Minkowskischen Satzes eine von Erhard Schmidt herrührende Variante in der hier für Polyeder benötigten Spezialisierung zu veröffentlichen. Harald Geppert (Berlin).

Hadwiger, H.: Über Integralmittelwerte bei geschlossenen sternförmigen Kurven. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 87, 199—203 (1942).

Eine geschlossene doppelpunktfreie Kurve C heißt in bezug auf den Pol O sternförmig, wenn C von jedem durch O gehenden Halbstrahl in genau einem Punkte geschnitten wird; C sei glatt und $\theta(\varphi)$ bedeute den spitzen Winkel zwischen Tangente und Fahrstrahl der auf Polarkoordinaten r, φ bezogenen Kurve. Verf. untersucht die Mittelbildungen

$$(1) \quad R_\alpha = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(\varphi)^\alpha d\varphi \right\}^{1/\alpha}, \quad S_\alpha = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\sin \theta(\varphi)\}^{-\alpha} d\varphi \right\}^{1/\alpha}, \quad \alpha \neq 0$$

$$R_0 = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log r(\varphi) d\varphi \right\}, \quad S_0 = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \sin \theta(\varphi) d\varphi \right\}$$

Es gelten bekanntlich für $\alpha < \beta$ die Ungleichungen $R_\alpha \leq R_\beta$, $S_\alpha \leq S_\beta$. Es ist stets $S_\alpha \geq 1$, und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn C ein Kreis mit O als Mittelpunkt ist. Speziell lassen sich auf dem Wege über die Höldersche Ungleichung Inhalt und Umfang von C ,

$$F = \pi R_2^2, \quad L = \int_0^{2\pi} r(\varphi) \sin^{-1} \theta(\varphi) d\varphi$$

mit den Größen (1) in Beziehung setzen. Beispielsweise gilt

$$R_\lambda S_{\lambda/(\lambda-1)} \leq \frac{L}{2\pi}, \quad \text{wenn } \lambda < 1; \quad R_\lambda R_{\lambda/(\lambda-1)} \leq \frac{F}{\pi}, \quad \text{wenn } \lambda > 1$$

und daher eine Abschätzung des isoperimetrischen Defizits:

$$L^2 - 4\pi F \leq 4\pi^2 R_2^2 (S_2^2 - 1).$$

Harald Geppert (Berlin).

Angewandte Geometrie:

● **Fabrieus-Bjerre, Fr.:** Geometrische Abbildungsverfahren. København: Jul. Gjellerups Forl. 1943. 59 S. u. 63 Abb. dkr 6.—. [Dänisch].

Einführung in die Elemente der zeichnerischen Darstellung in Parallelprojektion mit einem kurzen Hinweis auf die Zentralprojektion. Kapitelüberschriften: 1. Ebene Kurven. 2. Einfache Projektion. Flächen und Raumkurven. 3. Doppelte rechtwinklige Projektion.

E. Kruppa (Wien).

Nyström, E. J.: Abwicklung von Kegelflächen zweiter Ordnung. Soc. Sci. Fennica Comment. phys.-math. 12, Nr 12, 1—11 (1944).

Zur Ermittlung des Sektorwinkels bei der Abwicklung eines schiefen Kreiskegels wird eine Näherungsformel und eine Netztabelle für die Auswertung des dabei auftretenden elliptischen Integrals angegeben. Ferner wird die Konstruktion der Symmetrieebenen eines Kegels zweiten Grades auf die Ermittlung der Schnittpunkte von zwei gleichseitigen Hyperbeln mit einem bekannten Schnittpunkt zurückgeführt. Hierauf lassen sich auch die Fokalachsen leicht konstruieren. — Die Konstruktion des Verf. ist von einer Realitätsbedingung abhängig. Daß Th. Schmid [Über kubische Aufgaben und die konstruktive Behandlung des Achsenkomplexes, Sitzungsber. Akad. Wien, Math. naturwiss. Kl. IIa, 115, 905—922 (1906)] von denselben Grundgedanken ausgehend, die Aufgabe allgemein auf den Schnitt eines Kreises mit einer gleichseitigen Hyperbel zurückgeführt hat, scheint dem Verf. entgangen zu sein.

E. Kruppa (Wien).

Maurer, H.: Kartennetze für meteorologische Zwecke. Meteor. Z. 60, 422—426 (1943).

Lambert bildet in seiner Kegelkarte den Nordpol in die Spitze ab. Verf. erzielt die Winkeltreue aus der Forderung, daß die Längenvergrößerung in Richtung des Meridians und die in Richtung des Breitenkreises gleich sind. Der Winkel zwischen den Mantellinien und der Achse wird mit γ und die Poldistanz mit δ bezeichnet.

In der Karte ist die Radialkoordinate $r = c \operatorname{tg} \sin \gamma \frac{\delta}{2}$. Der Kugelradius wird mit R bezeichnet. Die Längenvergrößerung $\frac{c \sin \gamma}{2 R \sin 1 - \sin \gamma \frac{\delta}{2} \cos 1 + \sin \gamma \frac{\delta}{2}}$ wächst in den Polen

über alle Grenzen und nimmt ihren kleinsten Wert an, wenn die geographische Breite $= \gamma$ ist. Zwei Breitenkreise können längentreu abgebildet werden. Fallen diese beiden Breitenkreise zusammen, und wird der Kegel so gelegt, daß Original und Bild dieses Breitenkreises zusammenfallen, so berührt der Kegel längs dieses Breitenkreises die Kugel. Sind dagegen die beiden längentreu abgebildeten Breitenkreise voneinander verschieden, und wird der Kegel so gelegt, daß Original und Bild des einen dieser Breitenkreise zusammenfallen, so liegt das Original des anderen längentreu abgebildeten Breitenkreises nicht auf dem Kegel.

Ludwig (Hannover).

Pietschmann, Walter: Zum Problem des Rückwärtseinschneidens. *Z. Vermessungswes.*, Stuttgart. **73**, 165—167 (1944).

Der Rückwärtseinschnitt in der Ebene — also die Festlegung eines Neupunktes P gegenüber drei Festpunkten A, B, C mit Hilfe der gemessenen Winkel $\varphi = \sphericalangle APB$ und $\psi = \sphericalangle BPC$ — kann bekanntlich auf den Schnitt jener beiden Kreise zurückgeführt werden, die durch die Umfangswinkel φ, ψ über den Sehnen AB, BC bestimmt sind. Da die Koordinaten der Kreismitten M, N leicht zu berechnen sind, schlägt Verf. vor, P durch Spiegelung von B an MN zu ermitteln. Die Durchrechnung eines Beispiels zeigt die Eignung der abgeleiteten Formeln für die Praxis. *W. Wunderlich* (Berlin).

Topologie:

Eckmann, B.: Über Zusammenhänge zwischen algebraischen und topologischen Problemen. (*Math. Vereinig., Bern, Sitzg. v. 6. II. 1942.*) Mitt. naturforsch. Ges. Bern **1942**, LIV—LV (1943).

Certains problèmes d'algèbre, dont l'énoncé est élémentaire, n'ont reçu de réponse, plus ou moins complète, que grâce aux recherches topologiques de H. Hopf, de E. Stiefel et de l'A. (cfr. p. e. ce Zbl. **24**, 360; **27**, 144). *J. Leray* (Paris).

Tietze, Heinrich: Über Simony-Knoten und Simony-Ketten mit vorgeschriebenen singulären Primzahlen für die Figur und für ihr Spiegelbild. *Math. Z.* **49**, 351—369 (1944).

Der Primfaktor p der positiven oder negativen quadratfreien Zahl $n = p n_1$ heißt singulär, wenn $-n_1$ quadratischer Nichtrest nach p ist. Es wird nun

$$n = (-1)^e 2^\sigma PQR P^* \quad (\varrho, \sigma = 0, 1)$$

gesetzt, wo P, Q, R, P^* ungerade sind, und bei vorgegebenen P, Q, R nach solchen P^*, ϱ, σ gefragt, daß die Primfaktoren von P und Q die singulären Primzahlen von n , die Primfaktoren von P und R die singulären Primzahlen von $-n$ werden. Die Lösung ist nur möglich, wenn die Anzahl der Primfaktoren von P, Q, R , die bzw. den Restklassen 1, 3, 5, 7 modulo 8 angehören, einer gewissen Bedingung modulo 2 genügen. Ist die Bedingung erfüllt, so gibt es unendlich viele P^* . *K. Reidemeister*.

Merz †, K.: Mehrfache Kreuzhaube. *Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich* **87**, 193—198 (1942).

Von einer 6-fachen Kreuzhaube mit $f = 31, e = 26, k = 60$, somit Charakteristik $c = e - k + f = -3$ und Zusammenhangszahl $h = 6$, werden acht verschiedene Netze angegeben, aus denen durch Aufklappung sich verschiedene Anordnungen der Wendestrecken, in denen Ober- und Unterseite des Netzes in Möbius-Bändern zusammenstoßen, auf der entstehenden einseitigen Fläche ergeben. Als Verallgemeinerung wird die n -fache Kreuzhaube untersucht, die über einem $2n$ -Eck n Zellen neben n Lücken besitzt. Es ist $f = 5n + 1, e = 4n + 2, k = 10n, c = 3 - n, h = n$. Es wird ein allgemeines Verfahren zur Herstellung von Netzen gegeben. *W. Nowacki* (Bern).

Hopf, Heinz: Räume, die Transformationsgruppen mit kompakten Fundamentalbereichen gestatten. (*122. Jahresvers., Sitten, Sitzg. v. 29.—31. VIII. 1942.*) Verh. Schweiz. naturforsch. Ges. **1942**, 79—80.

Verf. spricht folgende beiden Sätze aus: Eine offene Mannigfaltigkeit, die eine Gruppe topologischer Transformationen mit kompaktem Fundamentalbereich gestattet, besitzt entweder einen Endpunkt oder zwei Endpunkte oder eine Endpunktmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums. Insbesondere kann daher die dreimal punktierte n -dimensionale Sphäre nicht universelle Überlagerungsfläche einer geschlossenen Mannigfaltigkeit sein. — Ein Korollar dazu: Die zweite Homotopiegruppe einer geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit ist entweder Null oder unendlich zyklisch oder die direkte Summe von abzählbar unendlichen unendlich zyklischen Gruppen. *Harald Geppert* (Berlin).